# CdL in Ingegneria Industriale (A-E e F-O)

Prova scritta di **Algebra lineare e Geometria**- 28 Settembre 2016

---

*Durata della prova: tre ore.*
*È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.*
*Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.*
*È vietato consultare libri o appunti.*

---

**I**

Determinare l'endomorfismo $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che:

$\operatorname{Ker} f = \mathscr{L}((1,1,0))$
$(1,1,1)$ sia autovettore associato all'autovalore 1
$f(1,0,0) = (h+1, h, 0)$.

1. Determinare la matrice $M(f)$ associata a $f$ rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.
2. Studiare la semplicità di $f$ al variare di $h \in \mathbb{R}$, determinando, se possibile, una base di autovettori.
3. Detta $p\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare definita da $p(x,y,z) = (x,y,z,0)$, studiare l'applicazione lineare $f'\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ dove $f' = p \circ f$.
4. Determinare la dimensione ed una base della controimmagine $f'^{-1}(W \cap \operatorname{Im} f')$, dove:
$$W = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y+z+t = 0\}.$$

*Soluzione*

1. Dalle condizioni assegnate otteniamo:
$$\begin{cases} f(1,1,0) = (0,0,0) \\ f(1,1,1) = (1,1,1) \\ f(1,0,0) = (h+1,h,0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(e_1) = (h+1,h,0) \\ f(e_2) = (-h-1,-h,0) \\ f(e_3) = (1,1,1). \end{cases}$$
Dunque:
$$M(f) = \begin{pmatrix} h+1 & -h-1 & 1 \\ h & -h & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Si vede che:
$$P(T) = \begin{vmatrix} h+1-T & -h-1 & 1 \\ h & -h-T & 1 \\ 0 & 0 & 1-T \end{vmatrix} = -T(1-T)^2.$$
Quindi, gli autovalori sono 0 e 1, con $m_0 = 1$ e $m_1 = 2$. Sappiamo già che $V_0 = \operatorname{Ker} f = \mathscr{L}((1,1,0))$ e che $f$ è semplice se $\dim V_1 = m_1 = 2$. Essendo $f_1 = f - i$ e $V_1 = \operatorname{Ker} f_1$, abbiamo:
$$M(f_1) = M(f) - I = \begin{pmatrix} h & -h-1 & 1 \\ h & -h-1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
per cui chiaramente si ha $\dim V_1 = 3 - \rho(M(f_1)) = 3 - 1 = 2 = m_1$ per ogni $h$, il che vuol dire che $f$ è semplice per ogni $h \in \mathbb{R}$. In particolare, è sempre possibile determinare una base di autovettori per $f$. Essendo:
$$V_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid hx + (-h-1)y + z = 0\} = \mathscr{L}((1,0,-h),(0,1,-h-1)),$$
vediamo che una base di autovettori per ogni $h \in \mathbb{R}$ è $[(1,1,0),(1,0,-h),(0,1,-h-1)]$.

3. Sappiamo che:

$$M(f') = M(p) \cdot M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h+1 & -h-1 & 1 \\ h & -h & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} h+1 & -h-1 & 1 \\ h & -h & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xmapsto{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} h+1 & -h-1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi, $\dim \operatorname{Im} f' = \rho(M(f')) = 2$ per ogni $h \in \mathbb{R}$ e una sua base è $[(h+1, h, 0, 0), (1, 1, 1, 0)]$. Inoltre, $\dim \operatorname{Ker} f' = 1$ e:

$$\operatorname{Ker} f' = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (h+1)x + (-h-1)y + z = 0,\ -x + y = 0\} = \mathscr{L}((1, 1, 0)).$$

4. Osserviamo immediatamente che $f'^{-1}(W \cap \operatorname{Im} f') = f'^{-1}(W)$, perché è ovvio che per ogni $v \in \mathbb{R}^3$ $f'(v) \in \operatorname{Im} f'$. Da:

$$\begin{pmatrix} h+1 & -h-1 & 1 \\ h & -h & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (h+1)x + (-h-1)y + z \\ hx - hy + z \\ z \\ 0 \end{pmatrix},$$

vediamo che:

$$f'(x, y, z) = ((h+1)x + (-h-1)y + z, hx - hy + z, z, 0).$$

Dunque:

$$f'^{-1}(W \cap \operatorname{Im} f') = f'^{-1}(W) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f'(x, y, z) \in W\} =$$
$$= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (2h+1)x + (-2h-1)y + 3z = 0\} = \mathscr{L}((3, 0, -2h-1), (0, 3, 2h+1)),$$

da cui vediamo che $\dim f'^{-1}(W) = 2$ per ogni $h \in \mathbb{R}$ e che una sua base è $[(3, 0, -2h-1), (0, 3, 2h+1)]$.

## II

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1. Determinare le equazioni della retta $t$ passante per $O$, parallela al piano $\pi\colon 2x - y - z = 0$ ed incidente la retta:

$$r\colon \begin{cases} x - 1 = 0 \\ y - z = 0. \end{cases}$$

2. Determinare la proiezione ortogonale della retta $p\colon x = y = z$ sul piano $\alpha\colon x - 2y + 2z + 1 = 0$.

3. Calcolare la distanza tra le rette:

$$r\colon \begin{cases} x - 1 = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad s\colon \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ z - 1 = 0. \end{cases}$$

4. Sul piano $z = 0$ determinare il fascio delle parabole che hanno asse parallelo alla prima bisettrice del piano $z = 0$ e sono tangenti all'asse $\vec{y}$ nel punto $(0, 1, 0)$.

5. Determinare e studiare le quadriche contenenti la conica:

$$\Gamma\colon \begin{cases} x^2 - 2xy + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

e aventi la seguente conica all'infinito:

$$C_\infty\colon \begin{cases} (x - y)^2 - z^2 = 0 \\ t = 0. \end{cases}$$

*Soluzione*

1. La retta $t$ è intersezione del piano $\pi'$ contenente $r$ e $O$ con il piano parallelo a $\pi$ e passante per $O$. Tuttavia, dal momento che $O \in \pi$, è evidente che $t = \pi' \cap \pi$. I piani contenenti la retta $r$ hanno equazione:
$$\lambda(x-1) + \mu(y-z) = 0.$$
Imponendo il passaggio per $O$ troviamo $-\lambda = 0$, per cui $\pi'\colon y - z = 0$ e la retta cercata è:
$$t = \pi' \cap \pi\colon \begin{cases} y - z = 0 \\ 2x - y - z = 0. \end{cases}$$

2. La proiezione ortogonale della retta $p$ su $\alpha$ è l'intersezione di $\alpha$ con il piano $\beta$ contenente $p$ e ortogonale ad $\alpha$. I piani contenenti $p$ hanno equazione:
$$\lambda(x-y) + \mu(y-z) = 0 \Rightarrow \lambda x + (-\lambda + \mu)y - \mu z = 0.$$
Vogliamo che i vettori di componenti $(\lambda, -\lambda+\mu, -\mu)$ e $(1, -2, 2)$ siano ortogonali tra loro, cioè deve essere $3\lambda - 4\mu = 0$. Ponendo $\lambda = 4$ e $\mu = 3$ troviamo $\beta\colon 4x - y - 3z = 0$ e la proiezione ortogonale di $p$ su $\alpha$ è:
$$\begin{cases} x - 2y + 2z + 1 = 0 \\ 4x - y - 3z = 0. \end{cases}$$

3. Cerchiamo il $\pi''$ piano contenente $s$ e parallelo a $r$. I piani contenenti la retta $s$ hanno equazione:
$$\lambda(x+y-1) + \mu(z-1) = 0 \Rightarrow \lambda x + \lambda y + \mu z - \lambda - \mu = 0.$$
Vogliamo che i vettori di componenti $(\lambda, \lambda, \mu)$ e $(0, 1, 1)$ siano ortogonali tra loro, per cui deve essere $\lambda + \mu = 0$. Prendendo $\lambda = 1$ e $\mu = -1$, otteniamo $\pi''\colon x + y - z = 0$. Prendiamo un punto qualsiasi di $r$, per esempio $A = (1, 0, 0) \in r$. Allora:
$$d(r, s) = d(A, \pi'') = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

4. La prima bisettrice del piano $z = 0$ ha equazioni:
$$\begin{cases} x - y = 0 \\ z = 0, \end{cases}$$
per cui il suo punto improprio è $P_\infty = (1, 1, 0, 0)$. Le parabole aventi asse parallelo alla prima bisettrice del piano $z = 0$ sono tangenti alla rette impropria nel punto $P_\infty$. L'asse $\vec{y}$ ha equazioni $x = z = 0$ e la retta che congiunge $(0, 1, 0)$ e $P_\infty$ ha equazioni:
$$\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ z = 0. \end{cases}$$
Dunque, il fascio cercato ha equazioni:
$$\begin{cases} \lambda xt + \mu(x - y + t)^2 = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda x + \mu(x - y + 1)^2 = 0 \\ z = 0. \end{cases}$$

5. Le quadriche contenenti la conica $\Gamma$ hanno equazione:
$$x^2 - 2xy + y^2 - 2x - 2y + 1 + z(ax + by + cz + d) = 0.$$
Cerchiamo la sua conica all'infinito:
$$\begin{cases} x^2 - 2xy + y^2 - 2xt - 2yt + t^2 + z(ax + by + cz + dt) = 0 \\ t = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 2xy + y^2 + axz + byz + cz^2 = 0 \\ t = 0. \end{cases}$$

Questa conica coincide con quella data se esiste $k \in \mathbb{R}$ tale che:

$$x^2 - 2xy + y^2 + axz + byz + cz^2 = k(x^2 - 2xy + y^2 - z^2) \Rightarrow \begin{cases} 1 = k \\ -2 = -2k \\ 1 = k \\ a = 0 \\ b = 0 \\ c = -k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = -1. \end{cases}$$

Quindi, le quadriche cercate hanno equazione:

$$x^2 - 2xy + y^2 - z^2 - 2x - 2y + dz + 1 = 0.$$

Le matrici associate sono:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & \frac{d}{2} \\ -1 & -1 & \frac{d}{2} & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Dal momento che $|B| = 4 > 0$ e $|A| = 0$ per ogni $d \in \mathbb{R}$, concludiamo che per ogni valore di $d$ le quadriche sono paraboloidi iperbolici.