CdL in Ingegneria Informatica (E-N) - Ingegneria Elettronica (E-N)

Prova scritta di Algebra lineare e Geometria - 28 Giugno 2016

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.

I

Sono dati i vettori $v_1 = (1,1,1)$, $v_2 = (0,1,1)$, $v_3 = (1,2,1) \in \mathbb{R}^3$ e l'endomorfismo $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che:

$$\begin{aligned} f(v_1) &= (h+3, h+3, 4) \\ f(v_2) &= (h-1, h, 1) \\ f(v_3) &= (h+2, h+3, 3), \end{aligned}$$

con $h \in \mathbb{R}$.

1. Determinare la matrice associata a f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ e studiare f al variare di $h \in \mathbb{R}$, determinando $\operatorname{Ker} f$ e $\operatorname{Im} f$ e le loro equazioni cartesiane.
2. Calcolare, al variare di $h \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(3,3,2)$.
3. Studiare la semplicità di f al variare di $h \in \mathbb{R}$. Nel caso $h = 1$ determinare una base di autovettori.
4. Diagonalizzare la seguente matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Soluzione

1. È semplice vedere che:

$$\begin{cases} f(e_1) + f(e_2) + f(e_3) = (h+3, h+3, 4) \\ f(e_2) + f(e_3) = (h-1, h, 1) \\ f(e_1) + 2f(e_2) + f(e_3) = (h+2, h+3, 3) \end{cases} \Rightarrow M(f) = \begin{pmatrix} 4 & -1 & h \\ 3 & 0 & h \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Dunque, $|M(f)| = 6 - 2h$. Ciò vuol dire che $|M(f)| \neq 0$ per $h \neq 3$, caso in cui f è un isomorfismo, cioè f è iniettiva e suriettiva. In particolare, $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^3$ e $\operatorname{Ker} f = \{(0,0,0)\}$. In questo caso non è necessario calcolare le equazioni cartesiane.

Sia $h = 3$. In tal caso:

$$M(f) = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \overset{\text{riducendo}}{\longmapsto} \begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

In particolare, $\dim \operatorname{Im} F = \rho(M(f)) = 2$ e una base di $\operatorname{Im} f$ è $[(4,3,3), (-1,0,-1)]$. Cerchiamo la sua equazione cartesiana:

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -3x + y + 3z = 0.$$

Quindi, $\operatorname{Im} f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid -3x + y + 3z = 0\}$. Inoltre, $\dim \operatorname{Ker} f = 3 - \dim \operatorname{Im} f = 1$ e:

$$\operatorname{Ker} f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 4x - y + 3z = 0,\ 3x + 3z = 0\} = \mathscr{L}((1,1,-1)).$$

2. Occorre risolvere il sistema la cui matrice completa associata è:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -1 & h & 3 \\ 3 & 0 & h & 3 \\ 3 & -1 & 2 & 2 \end{array}\right) \xmapsto{\text{riducendo}} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -1 & h & 3 \\ 3 & 0 & h & 3 \\ 0 & 0 & \frac{-2h+6}{3} & 0 \end{array}\right).$$

Dunque, per $h \neq 3$ abbiamo:

$$\begin{cases} 4x - y + hz = 3 \\ 3x + hz = 3 \\ \frac{-2h+6}{3} z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 0. \end{cases}$$

Dunque, per $h \neq 3$ $f^{-1}(3,3,2) = \{(1,1,0)\}$.

Sia $h = 3$. In tal caso abbiamo ∞^1 soluzioni:

$$\begin{cases} 4x - y + 3z = 3 \\ 3x + 3z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x \\ z = 1 - x. \end{cases}$$

Dunque, per $h = 3$ si ha $f^{-1}(3,3,2) = \{(x, x, 1-x) \in \mathbb{R}^3\}$.

3. Si vede che:

$$P(T) = \begin{vmatrix} 4-T & -1 & h \\ 3 & -T & h \\ 3 & -1 & 2-T \end{vmatrix} = -T^3 + 6T^2 + (2h-11)T + 6 - 2h = (1-T)[T^2 - 5T + 6 - 2h].$$

L'equazione $T^2 - 5T + 6 - 2h = 0$ ha $\Delta = 8h + 1$. Quindi, per $h < -\frac{1}{8}$ l'equazione ammette due soluzioni immaginarie e coniugate, che non possono essere autovalori, in quanto gli autovalori devono essere reali. Ciò vuol dire che per $h < -\frac{1}{8}$ f non è semplice.

Sia $h = -\frac{1}{8}$. In tal caso, gli autovalori sono $T = 1$ e $T = \frac{5}{2}$, con $m_1 = 1$ e $m_{\frac{5}{2}} = 2$. In questo caso f è semplice se $\dim V_{\frac{5}{2}} = m_{\frac{5}{2}} = 2$. Sappiamo che $V_{\frac{5}{2}} = \operatorname{Ker} f_{\frac{5}{2}}$, dove:

$$M(f_{\frac{5}{2}}) = M(f) - \frac{5}{2}I = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -1 & -\frac{1}{8} \\ 3 & -\frac{5}{2} & -\frac{1}{8} \\ 3 & -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \xmapsto{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -1 & -\frac{1}{8} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi, $\dim V_{\frac{5}{2}} = 3 - 2 = 1 < 2 = m_{\frac{5}{2}}$. Quindi, per $h = -\frac{1}{8}$ f non è semplice.

Sia $h > -\frac{1}{8}$ in tal caso l'equazione $T^2 - 5T + 6 - 2h = 0$ ha due soluzioni reali e distinte $\frac{5+\sqrt{1+8h}}{2}$ e $\frac{5-\sqrt{1+8h}}{2}$, che sono dunque autovalori di f, oltre al già determinato $T = 1$. Quest'ultimo autovalore 1 è soluzione dell'equazione $T^2 - 5T + 6 - 2h = 0$ se e solo se $1 - 5 + 6 - 2h = 0$, cioè se e solo se $h = 1$. Ciò significa che per $h > -\frac{1}{8}$, $h \neq 1$, i tre autovalori $\frac{5+\sqrt{1+8h}}{2}$, $\frac{5-\sqrt{1+8h}}{2}$ e 1 sono distinti tra loro e tutti di molteplicità algebrica 1. In particolare, questo vuol dire che per $h > -\frac{1}{8}$, $h \neq 1$, f è certamente semplice.

Sia $h = 1$. In tal caso, gli autovalori sono $T = 1$, con $m_1 = 2$, e $T = 4$, con $m_4 = 1$. f in tal caso sarà semplice se $\dim V_1 = m_1 = 2$. Sappiamo che $V_1 = \operatorname{Ker} f_1$, dove:

$$M(f_1) = M(f) - I = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

È evidente che $\dim V_1 = 3 - \rho(M(f_1)) = 2 = m_1$, per cui possiamo affermare che per $h = 1$ f è semplice e, per definizione, ammette una base di autovettori. Abbiamo che:

$$V_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x - y + z = 0\} = \mathscr{L}((1,0,-3),(0,1,1)).$$

Poi, $V_4 = \operatorname{Ker} f_4$ e:

$$M(f_4) = M(f) - 4I = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 3 & -4 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \overset{\text{riducendo}}{\longmapsto} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi:

$$V_4 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid -y + z = 0,\ 3x - 2y = 0\} = \mathscr{L}((1,1,1)).$$

Dunque, una base di autovettori per f nel caso $h = 1$ è $[(1,0,-3),(0,1,1),(1,1,1)]$.

4. Si vede che:

$$P_A(T) = \begin{vmatrix} 2-T & 1 & 0 \\ 1 & 1-T & 1 \\ 0 & 1 & 2-T \end{vmatrix} = -T(T-2)(T-3).$$

Dunque, gli autovalori di A sono $0,2,3$, tutti di molteplicità algebrica 1, per cui A è diagonalizzabile. Calcoliamo gli autospazi.

V_0 è dato da:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \overset{\text{riducendo}}{\longmapsto} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi:

$$V_0 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y = 0,\ -x + z = 0\} = \mathscr{L}((1,-2,1)).$$

V_2 è dato da:

$$A - 2I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{\text{riducendo}}{\longmapsto} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi:

$$V_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 0,\ x + z = 0\} = \mathscr{L}((1,0,-1)).$$

V_3 è dato da:

$$A - 3I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \overset{\text{riducendo}}{\longmapsto} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi:

$$V_0 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid -x + y = 0,\ -y + z = 0\} = \mathscr{L}((1,1,1)).$$

Quindi, possiamo concludere che, prendendo:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

si ha $P^{-1}AP = D$.

II

È assegnato nel piano un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, u$.

1. Determinare le equazioni della retta r passante per i punti $A = (2,0)$ e $B = (2,-3,0)$.

2. Determinare l'asse del segmento di estremi i punti $C = (4,3)$ e $D = (8,1)$.

3. Determinare le coordinate del centro della circonferenza tangente alla retta $x + y - 7 = 0$ nel punto $C = (4,3)$ e passante per $D = (8,1)$.

4. Determinare e studiare il fascio di coniche passanti per i punti $P_1 = (1, 2)$, $P_2 = (-5, 0)$, $P_3 = (-1, -2)$ e $P_4 = (5, 0)$.

Soluzione

1. Il vettore di componenti $(2, -3)$ è parallelo alla retta AB, per cui essa ha equazione $3x + 2y - 6 = 0$.

2. Il punto medio di C e D è $M = (6, 2)$. L'asse del segmento passa per M ed è ortogonale alla retta CD, per cui tale asse ha equazione $2x - y - 10 = 0$.

3. Il centro della circonferenza è l'intersezione tra l'asse del segmento di estremi C e D, calcolato nel punti precedente, e la retta passante per C e perpendicolare alla retta tangente $x + y - 7 = 0$. Dunque, tale centro è l'intersezione:
$$\begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ 2x - y - 10 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 9 \\ y = 8. \end{cases}$$
Quindi, il centro è il punto di coordinate $(9, 8)$.

4. Le coniche spezzate del fascio sono le rette $P_1P_2 \cup P_3P_4\colon (x - 3y + 5)(x - 3y - 5) = 0$, $P_1P_3 \cup P_2P_4\colon y(2x - y) = 0$ e $P_1P_4 \cup P_2P_3\colon (x + 2y - 5)(x + 2y + 5) = 0$. Dunque, il fascio di coniche ha equazione:
$$hy(2x - y) + (x + 2y - 5)(x + 2y + 5) = 0 \Rightarrow x^2 + (2h + 4)xy + (4 - h)y^2 - 25 = 0.$$
Le matrici associate sono:
$$B = \begin{pmatrix} 1 & h+2 & 0 \\ h+2 & 4-h & 0 \\ 0 & 0 & -25 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & h+2 \\ h+2 & 4-h \end{pmatrix}.$$
Si ha $|B| = -25(h^2 + 5h)$ e $|A| = -h^2 - 5h$. Quindi, per $h = 0$ e $h = -5$ abbiamo, rispettivamente, le coniche spezzate $P_1P_4 \cup P_2P_3$ e $P_1P_2 \cup P_3P_4$, mentre l'altra conica spezzata è quella nascosta. Inoltre, per $-5 < h < 0$ abbiamo delle ellissi, tutte reali, nessuna delle quali è una circonferenza. Per $h < -5$ e $h > 0$ abbiamo delle iperboli, tra le quali quella equilatera si ottiene per $h = 5$. Non ci sono parabole nel fascio.

III

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1. Determinare l'equazione del piano π passante per $P = (1, 1, 0)$ e perpendicolare alla retta:
$$t\colon \begin{cases} 2x - z - 2 = 0 \\ 2y + z - 2 = 0. \end{cases}$$

2. Determinare le equazioni della retta s passante per $S = (2, -3, 1)$, ortogonale alla retta $p\colon x = y = z$ e parallela al piano $\alpha\colon x + y - z = 0$.

Soluzione

1. La retta t ha parametri direttori $(1, -1, 2)$, per cui si ha $\pi\colon x - y + 2z = 0$.

2. La retta p ha parametri direttori $(1, 1, 1)$, mentre $(1, 1, -1)$ sono le componenti di un vettore perpendicolare al piano α. Perciò, se la retta s ha parametri direttori (l, m, n), deve essere:
$$\begin{cases} l + m + n = 0 \\ l + m - n = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n = 0 \\ m = -l. \end{cases}$$
Quindi la retta s ha equazioni:
$$s\colon \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -3 - t \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow s\colon \begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ z = 1. \end{cases}$$