CdL in Ingegneria Informatica - Ingegneria Elettronica -Ingegneria REA

Prova scritta di **Algebra lineare e Geometria**- 28 Aprile 2016

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.

I

È dato l'endomorfismo $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che:

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & h & 1 & 2 \\ h & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

al variare di $h \in \mathbb{R}$.

1. Studiare f, al variare di $h \in \mathbb{R}$, determinando $\operatorname{Ker} f$ e $\operatorname{Im} f$.
2. Studiare la semplicità di f per $h = 0$, determinando, se possibile, una base di autovettori.
3. Studiare la semplicità di f per $h = 1$, determinando, se possibile, una base di autovettori.
4. Dato $V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y - z = 0,\ z - t = 0\}$, calcolare $f(V)$ al variare di $h \in \mathbb{R}$, specificandone la dimensione. Determinare il valore di h per il quale $f(V) \subseteq V$ e specificare se vale l'uguaglianza o meno.

Soluzione

1. Si vede facilmente che $|M(f)| = 3(1 - h^2)$. Dunque, per $h \neq \pm 1$ f è un isomorfismo, cioè f è iniettiva e suriettiva, per cui $\operatorname{Ker} f = \{(0, 0, 0, 0)\}$ e $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^4$.
   Sia $h = 1$. In tal caso:
   $$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \overset{\text{riducendo}}{\longmapsto} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
   per cui $\dim \operatorname{Im} f = \rho(M(f)) = 3$ e una sua base è data da $[(1, 1, 0, 0), (1, -1, 2, 1), (2, 0, 1, 2)]$. Inoltre, $\dim \operatorname{Ker} f = 1$ e:
   $$\operatorname{Ker} f = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + 2t = 0,\ -2z - 2t = 0,\ -t = 0\} = \mathscr{L}((1, -1, 0, 0)).$$
   Sia $h = -1$. In tal caso:
   $$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \overset{\text{riducendo}}{\longmapsto} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
   per cui $\dim \operatorname{Im} f = \rho(M(f)) = 3$ e una sua base è data da $[(1, -1, 0, 0), (1, -1, 2, 1), (2, 0, 1, 2)]$. Inoltre, $\dim \operatorname{Ker} f = 1$ e:
   $$\operatorname{Ker} f = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y + z + 2t = 0,\ 2t = 0,\ 2z = 0\} = \mathscr{L}((1, 1, 0, 0)).$$

2. Sia $h = 0$. Si vede facilmente che:

$$P(T) = \begin{vmatrix} 1-T & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1-T & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2-T & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2-T \end{vmatrix} = (1-T)^3(3-T)$$

per cui gli autovalori sono 1 e 3, con $m_1 = 3$ e $m_3 = 1$. Essendo $m_3 = 1$, si ha $1 \leq \dim V_3 \leq m_3 = 1$, per cui $\dim V_3 = m_3 = 1$. Affinché f sia semplice deve essere anche $\dim V_1 = m_1 = 3$. Sappiamo che $V_1 = \operatorname{Ker} f_1$, dove $f_1 = f - i$ e:

$$M(f_1) = M(f) - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xmapsto{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque, $\rho(M(f_1)) = 2$ e $\dim V_1 = 4 - \rho(M(f_1)) = 2 < 3 = m_1$. Ciò vuol dire che per $h = 0$ f non è semplice, per cui per $h = 0$ non esiste una base di autovettori.

3. Sia $h = 1$. Si vede facilmente che:

$$P(T) = \begin{vmatrix} 1-T & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1-T & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2-T & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2-T \end{vmatrix} = -T(1-T)(2-T)(3-T),$$

per cui per $h = 1$ gli autovalori sono $0, 2, 1, 3$, tutti di molteplicità algebrica 1. Dunque, f è semplice. Calcoliamo gli autospazi. Sappiamo che $V_0 = \operatorname{Ker} f = \mathscr{L}((1, -1, 0, 0))$, come abbiamo già visto.

$V_2 = \operatorname{Ker} f_2$ e $f_2 = f - 2i$, dove:

$$M(f_2) = M(f) - 2I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xmapsto{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

per cui:

$$V_2 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid -x + y + z + 2t = 0,\ 2t = 0,\ z = 0\} = \mathscr{L}((1, 1, 0, 0)).$$

$V_1 = \operatorname{Ker} f_1$ e $f_1 = f - i$, dove:

$$M(f_1) = M(f) - I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xmapsto{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

per cui:

$$V_1 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid y + z + 2t = 0,\ x - z = 0,\ z + t = 0\} = \mathscr{L}((1, 1, 1, -1)).$$

$V_3 = \operatorname{Ker} f_3$ e $f_3 = f - 3i$, dove:

$$M(f_3) = M(f) - 3I = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xmapsto{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

per cui:

$$V_1 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid -2x + y + z + 2t = 0,\ -3x + z + 4t = 0,\ -z + t = 0\} = \mathscr{L}((5, 1, 3, 3)).$$

Dunque, una base di autovettori è $[(1, -1, 0, 0), (1, 1, 0, 0), (1, 1, 1, -1), (5, 1, 3, 3)]$.

4. Si vede facilmente che $V = \mathscr{L}((1,1,0,0),(0,-1,1,1))$, per cui $f(V) = \mathscr{L}(f(1,1,0,0), f(0,-1,1,1))$. Inoltre, si vede anche che $f(1,1,0,0) = (h+1,h+1,0,0)$ e $f(0,-1,1,1) = (3-h,-2,3,3)$, per cui $f(V) = \mathscr{L}((h+1,h+1,0,0),(3-h,-2,3,3))$. Mettendo i vettori in matrice

$$\begin{pmatrix} 3-h & -2 & 3 & 3 \\ h+1 & h+1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

osserviamo che essa ha rango 2 per $h \neq -1$ e rango 1 per $h = -1$. Ciò vuol dire che $\dim f(V) = 2$ per $h \neq -1$ e $\dim f(V) = 1$ per $h = -1$. Inoltre, $f(V) \subseteq V$ se e solo se $(h+1,h+1,0,0),(3-h,-2,3,3) \in V$, ovvero se essi verificano le equazioni cartesiane di V. È semplice notare che $(h+1,h+1,0,0) \in V$ per ogni valore di h, mentre $(3-h,-2,3,3) \in V$ solo per $h = 2$. Ciò vuol dire che $f(V) \subseteq V$ per $h = 2$, valore per il quale si ha $\dim f(V) = 2$. Essendo anche $\dim V = 2$, concludiamo che per tale valore $f(V) = V$.

II

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1. Dati il punto $P = (0,1,0)$ e la retta $r\colon x - y = x - z = 0$, determinare il luogo di rette passanti per P che formano con r un angolo di $\frac{\pi}{4}$.
2. Determinare e studiare il fascio di coniche del piano $z = 0$ passanti per i punti $A = (1,0)$, $B = (-1,0)$, $C = (0,2)$ e $D = (0,-2)$.
3. Determinare il cono contenente la conica:

$$\Gamma\colon \begin{cases} x^2 - y^2 - 2xy - 1 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

e avente vertice $V = (1,0,1)$.

Soluzione

1. La retta r ha parametri direttori $(1,1,1)$ e la generica retta per P ha equazioni:

$$\begin{cases} x = lt \\ y = 1 + mt \\ z = nt. \end{cases}$$

I vettori di componenti $(1,1,1)$ e (l,m,n) devono formare un angolo di $\frac{\pi}{4}$, per cui deve essere:

$$\frac{l+m+n}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}\sqrt{3}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow l^2 + m^2 + n^2 - 4lm - 4ln - 4mn = 0.$$

Ricavando $l = \frac{x}{t}$, $m = \frac{y-1}{t}$ e $n = \frac{z}{t}$ e sostituendo, otteniamo:

$$x^2 + (y-1)^2 + z^2 - 4x(y-1) - 4xz - 4(y-1)z = 0.$$

2. Le rette da considerare sono $AB\colon y = 0$ e $CD\colon x = 0$, $AC\colon 2x + y - 2 = 0$ e $BD\colon 2x + y + 2 = 0$, $AD\colon 2x - y - 2 = 0$ e $BC\colon 2x - y + 2 = 0$. Dunque, le coniche spezzate del fascio hanno equazioni $xy = 0$, $(2x+y-2)(2x+y+2) = 0$ e $(2x-y-2)(2x-y+2) = 0$. Prendiamo due di queste coniche per scrivere l'equazione del fascio:

$$hxy + (2x+y-2)(2x+y+2) = 0 \Rightarrow 4x^2 + (h+4)xy + y^2 - 4 = 0.$$

Le matrici associate sono:

$$B = \begin{pmatrix} 4 & \frac{h+4}{2} & 0 \\ \frac{h+4}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{pmatrix} 4 & \frac{h+4}{2} \\ \frac{h+4}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Si vede che $|B| = \frac{h^2+8h}{4}$, per cui le coniche spezzate si ottengono per $h = 0$, che sarebbe $(2x + y - 2)(2x + y + 2) = 0$, e per $h = -8$, che sarebbe $(2x - y - 2)(2x - y + 2) = 0$. La conica $xy = 0$ è, invece, quella nascosta. Inoltre, $|A| = -\frac{h^2+8h}{16}$, per cui per $-8 < h < 0$ abbiamo delle ellissi, ovviamente tutte reali, nessuna delle quali è una circonferenza, mentre per $h < -8$ e $h > 0$ abbiamo delle iperboli, nessuna delle quali è equilatera. Osserviamo che non ci sono parabole nel fascio, perché per $h = 0$ e $h = -8$ le coniche sono spezzate.

3. Il generico punto della conica è $P = (\alpha, \beta, 0)$, dove $\alpha^2 - \beta^2 - 2\alpha\beta - 1 = 0$. La retta PV ha equazioni:

$$PV\colon \frac{x-1}{\alpha-1} = \frac{y}{\beta} = \frac{z-1}{-1}.$$

Da queste ricaviamo $\alpha = \frac{x-z}{1-z}$ e $\beta = \frac{y}{1-z}$ e, sostituendo in $\alpha^2 - \beta^2 - 2\alpha\beta - 1 = 0$, otteniamo:

$$\frac{(x-z)^2}{(1-z)^2} - \frac{y^2}{(1-z)^2} - 2\frac{(x-z)y}{(1-z)^2} - 1 = 0$$

$$\Rightarrow (x-z)^2 - y^2 - 2(x-z)y - (1-z)^2 = 0.$$

Questa è l'equazione del cono cercato.