

**CdL in Ingegneria Informatica (A-D e O-Z) -
Ingegneria Elettronica (A-D e O-Z) -Ingegneria REA**

Prova scritta di **Algebra lineare e Geometria**- 27 Giugno 2016

Durata della prova: tre ore.

È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.

Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.

È vietato consultare libri o appunti.

Compito A

I

È assegnato l'endomorfismo $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definito dalle assegnazioni:

$$\begin{aligned}f(1, 1, 1) &= (0, 5h + 1, 2) \\f(0, 1, 1) &= (-1, 4h + 1, 2) \\f(1, -1, 0) &= (1, 0, 0),\end{aligned}$$

al variare di $h \in \mathbb{R}$.

1. Studiare f , al variare di $h \in \mathbb{R}$, determinando $\text{Ker } f$ e $\text{Im } f$ e le loro equazioni cartesiane.
2. Verificare che per ogni valore di h si ha $\text{Ker } f \oplus \text{Im } f = \mathbb{R}^3$.
3. Nel caso $h = 1$ determinare la matrice $M(f^{-1})$ associata all'applicazione inversa di f .
4. Studiare la semplicità di f al variare di $h \in \mathbb{R}$ e determinare una base di autovettori ove è possibile.
5. Calcolare, al variare di $h \in \mathbb{R}$, la controimmagine

$$f^{-1}(1, 1, 0) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x, y, z) = (1, 1, 0)\}$$

II

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1) Sono assegnati il piano π e la retta r di equazioni, rispettivamente:

$$\pi: x - y + 1 = 0 \quad r: \begin{cases} x - y - 3 = 0 \\ z + 2 = 0 \end{cases}.$$

Dato il punto $Q = (0, 1, 0) \in \pi$ trovare la retta s passante per Q e ortogonale al piano π . Calcolare l'angolo $\hat{r}s$ che esse formano. Determinare il luogo delle rette passanti per Q e che formano un angolo di $\frac{\pi}{4}$ con la retta s .

2) Sul piano $z = 0$ studiare il fascio di coniche ϕ

$$\phi: x^2 + (1 + h)y^2 + 2xy + (6h + 6)y = 0,$$

al variare del parametro $h \in \mathbb{R}$, determinando, in particolare, punti base e coniche spezzate. Studiare la parabola del fascio determinandone vertice e asse.

3) Determinare e studiare le quadriche contenenti la conica

$$\Gamma: \begin{cases} y = 0 \\ x^2 + z^2 + 2xz + 3x = 0 \end{cases}$$

e passanti per i punti $A = (0, 1, 0)$, $B = (0, -2, 0)$ e $C = (0, 1, 1)$.

Soluzione

1) Per determinare la matrice $M(f)$ risolviamo il sistema lineare

$$\begin{cases} f(e_1) + f(e_2) + f(e_3) = (0, 5h + 1, 2) \\ f(e_2) + f(e_3) = (-1, 4h + 1, 2) \\ f(e_1) - f(e_2) = (1, 0, 0) \end{cases} \implies M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ h & h & 3h + 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

si ha $|M(f)| = 2h$. Dunque, per $h \neq 0$ f è un isomorfismo e $\text{Ker } f = \{(0, 0, 0)\}$ e $\text{Im } f = \mathbb{R}^3$, cioè f è sia iniettiva che suriettiva.

Se $h = 0$ abbiamo:

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Dunque, $\dim \text{Im } f = \rho(M(f)) = 2$ e una sua base è:

$$\text{Im } f = \mathcal{L}((1, 0, 0), (-1, 1, 2))$$

Inoltre, $\dim \text{Ker } f = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \text{Im } f = 1$ e:

$$\text{Ker } f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - z = z = 0\} = \{(0, y, 0)\}$$

Si vede che nel caso $h = 0$ l'equazione cartesiana dell'immagine di f è data dal determinante della seguente matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ x & y & z \end{pmatrix}$$

da cui $2y - z = 0$. Per quanto riguarda l'equazione cartesiana del nucleo sono state già trovate precedentemente (nel caso $h = 0$ avevamo trovato $x - z = z = 0$).

2) Per $h \neq 0$ è banalmente vera. Per $h = 0$ dobbiamo verificare che $\text{ker } f \cap \text{Im } f = \emptyset$ e l'unione della basi (immagine e nucleo) forma una base di \mathbb{R}^3 .

Si vede che:

$$\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \\ z - 2y = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0. \end{cases}$$

Inoltre

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2,$$

quindi sono tre vettori linearmente indipendenti e formano una base di \mathbb{R}^3 .

3) Nel caso $h = 1$ la matrice inversa è:

$$M(f^{-1}) = M(f)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

4) Si vede che:

$$P(T) = \begin{vmatrix} 1 - T & 0 & -1 \\ h & h - T & 3h + 1 \\ 0 & 0 & 2 - T \end{vmatrix} = (1 - T)(h - T)(2 - T),$$

per cui gli autovalori sono $1, h, 2$. Per $h \neq 1, 2$ essi sono tutti distinti di molteplicità algebrica pari a 1, da cui segue che f è semplice in tali casi. In questi casi troviamo gli autospazi.

- $T = 1$, $V_1 = \{(x, \frac{-hx}{h-1}, 0)\}$ con base $u_1 = (1, \frac{-h}{h-1}, 0)$;

- $T = 2$, $V_2 = \left\{ \left(x, \frac{(2h+1)x}{h-2}, -x \right) \right\}$ con base $u_2 = \left(1, \frac{2h+1}{h-2}, -1 \right)$;
- $T = h$ $V_h = \{(0, y, 0)\}$ con base $u_3 = (0, 1, 0)$.

Sia $h = 1$. In tal caso, gli autovalori sono 1 e 2, con $m_1 = 2$ e $m_2 = 1$. Calcoliamo la dimensione dell'auto-spazio V_1 .

Sappiamo che $V_1 = \text{Ker } f_1$. Sostituiamo nella matrice $M(f)$ il valore $h = 1$ e sottraiamo $T = 1$ dalla diagonale principale:

$$M(f_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dunque, $\rho(M(f_1)) = 2$ e, quindi, $\dim V_1 = 3 - \rho(M(f_1)) = 1 < 2 = m_1$. Dunque, per $h = 1$ f non è semplice.

Sia $h = 2$. In tal caso, gli autovalori sono 1 e 2, con $m_1 = 1$ e $m_2 = 2$. Calcoliamo la dimensione dell'auto-spazio V_2 .

Sappiamo che $V_2 = \text{Ker } f_2$. Sostituiamo nella matrice $M(f)$ il valore $h = 2$ e sottraiamo $T = 2$ dalla diagonale principale:

$$M(f_2) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dunque, $\rho(M(f_2)) = 2$ e, quindi, $\dim V_2 = 3 - \rho(M(f_2)) = 1 < 2 = m_2$. Dunque, per $h = 2$ f non è semplice.

5) Dobbiamo discutere il sistema associato alla matrice completa:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ h & h & 3h+1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array} \right)$$

da cui per $h \neq 0$ si ha:

$$\begin{cases} x = 1 \\ h + hy = 1 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{1-h}{h} \\ z = 0. \end{cases}$$

quindi per $h \neq 0$ si ha $f^{-1}(1, 1, 0) = \left(1, \frac{1-h}{h}, 0 \right)$. Se $h = 0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array} \right)$$

da cui il sistema risulta impossibile quindi $f^{-1}(1, 1, 0) = \emptyset$.

Soluzione

1) La retta s passante per Q essendo ortogonale a π come suoi parametri direttori possiamo prendere direttamente i parametri direttori del piano stesso (cioè $(1, -1, 0)$) e quindi ha equazione:

$$\begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ z = 0. \end{cases}$$

Inoltre si vede facilmente che la retta s di parametri direttori $(1, -1, 0)$ e la retta r di parametri direttori $(1, 1, 0)$ sono ortogonali. Troviamo adesso il luogo delle rette passanti per Q :

$$\begin{cases} \frac{x}{l} = \frac{y-1}{m} \\ \frac{y-1}{m} = \frac{z}{n} \\ \frac{(l, m, n)(1, -1, 0)}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2} \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} l = \frac{mx}{y-1} \\ n = \frac{mz}{y-1} \\ 2lm + n^2 = 0. \end{cases}$$

Sostituendo si ottiene il seguente luogo delle rette da noi cercato:

$$2xy - 2x + z^2 = 0.$$

2) Dalla sua matrice si ha

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & h+1 & 3h+3 \\ 0 & 3h+3 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} |B| = -(3h+3)^2 \\ |A| = h. \end{cases}$$

Quindi nel fascio ci sono due coniche spezzate distinte, per $h = -1$ con molteplicità 2 e per $h = \infty$ con molteplicità 1. Per $h = \infty$ si trova la conica spezzata $y^2 + 6y = 0$. Per $h = -1$ la conica spezzata è $x(x+2y) = 0$. I punti base del fascio sono $(0,0)$, contato due volte, $(0,-6)$ e $(12,-6)$. Se $h \neq -1$ caratterizziamo le coniche irriducibili di Φ usando $|A| = h$.

- $|A| > 0, \Rightarrow h > 0$ ELLISSI REALI. Non ci sono circonferenze nel fascio.
- $|A| = 0 \Rightarrow h = 0$ PARABOLA che ha equazione $x^2 + 2xy + y^2 + 6y = 0$.
- $|A| < 0 \Rightarrow h < 0, h \neq -1$ IPERBOLI. In particolare se $h = -2$ si ha un'iperbole equilatera.

La parabola ha punto improprio $P^\infty = (1, -1, 0)$ quindi l'asse ha coefficiente angolare -1 . Scriviamo il fascio di rette ortogonali all'asse: $y - x + k = 0$ imponendo la condizione di tangenza ($\Delta = 0$) con la parabola si ottiene il valore di $k = -\frac{3}{4}$. Sostituendo il valore di k nel fascio di rette ortogonali all'asse si trova quella tangente alla parabola che ha equazione: $y - x - \frac{3}{4} = 0$.

Il vertice è il punto (proprio) comune alla parabola ed all'asse, $V = (-\frac{9}{8}, -\frac{3}{8})$.

3) Le quadriche contenenti la conica Γ hanno equazione:

$$x^2 + z^2 + 2xz + 3x + y(ax + by + cz + d) = 0.$$

Imponendo il passaggio per i punti dati, otteniamo il sistema:

$$\begin{cases} b + d = 0 \\ -2b + d = 0 \\ b + c + d + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ c = -1 \\ d = 0. \end{cases}$$

Dunque, le quadriche contenenti la conica e i punti dati hanno equazione:

$$x^2 + z^2 + 2xz + 3x + axy - yz = 0.$$

a cui associamo la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & \frac{a}{2} & 1 & \frac{3}{2} \\ \frac{a}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad |B| = \frac{9}{16}, |A| = -\frac{(a+1)^2}{4}.$$

In particolare si deduce che al variare di $a \in \mathbb{R}$ le quadriche sono non degeneri. Per $a = -1$ si ha un PARABOLOIDE IPERBOLICO. Per $a \neq -1$ si trovano IPERBOLOIDI IPERBOLICI O ELLISSOIDI IMMAGINARI. Calcoliamo il polinomio caratteristico della sottomatrice A :

$$P(T) = \frac{1}{4}(-4T^3 + 8T^2 + (a^2 + 1)T - (a+1)^2).$$

dal quale applicando la regola dei segni di Cartesio, si deduce che sono IPERBOLIDI IPERBOLICI. Si poteva anche dedurre dal fatto che le quadriche contengono per costruzione punti reali e, quindi, non possiamo mai avere ellipsoidi immaginari.

Per $a = \infty$ si ottiene la quadrica spezzata in due piani distinti $xy = 0$.