CdL in Ingegneria Informatica (A-D e O-Z) - Ingegneria Elettronica (A-D e O-Z) e Ingegneria REA

Prova scritta di **Algebra lineare e Geometria**- 26 Settembre 2016

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.

I

È assegnato l'endomorfismo $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito dall'assegnazione:

$$f(x,y,z) = (hx+y+z, x+hy+z, -x+y+z),$$

al variare di $h \in \mathbb{R}$.

1. Studiare f, al variare di $h \in \mathbb{R}$, determinando $\operatorname{Ker} f$ e $\operatorname{Im} f$ e le loro equazioni cartesiane.
2. Studiare la semplicità di f al variare di $h \in \mathbb{R}$, determinando, ove possibile, una base di autovettori.
3. Data la matrice:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$
determinare il valore di $h \in \mathbb{R}$ per il quale $A = M^{\mathscr{B}}(f)$, essendo $\mathscr{B} = [(1,1,-3),(1,0,-1),(0,0,1)]$.
4. Data $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definita da:
$$g(x,y,z) = (x-y+z, y, z, -x+y+z),$$
calcolare $(g \circ f)^{-1}(1,1,1,1)$ al variare di $h \in \mathbb{R}$.

Soluzione

1. È semplice vedere che:
$$M(f) = \begin{pmatrix} h & 1 & 1 \\ 1 & h & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
Dunque, $|M(f)| = h^2-1$, per cui $|M(f)| \neq 0$ per $h \neq \pm 1$ e per tali valori si conclude subito che f è un isomorfismo. In particolare, per $h \neq \pm 1$ abbiamo che f è iniettiva e suriettiva, $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^3$ e $\operatorname{Ker} f = \{(0,0,0)\}$.
Sia $h = 1$. Dunque:
$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xmapsto{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$
Questo vuol dire che $\dim \operatorname{Im} f = \rho(M(f)) = 2$ e una sua base è $[(1,1,-1),(1,1,1)]$. Da:
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2x - 2y = 0,$$

vediamo che $\operatorname{Im} f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y = 0\}$. Inoltre, $\dim \operatorname{Ker} f = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \operatorname{Im} f = 1$ e:

$$\operatorname{Ker} f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0,\ 2y + 2z = 0\} = \mathscr{L}((0,1,-1)).$$

Sia $h = -1$. Dunque:

$$M(f) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Questo vuol dire che $\dim \operatorname{Im} f = \rho(M(f)) = 2$ e una sua base è $[(-1,1,-1),(1,1,1)]$. Da:

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2x - 2z = 0,$$

vediamo che $\operatorname{Im} f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - z = 0\}$. Inoltre, $\dim \operatorname{Ker} f = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \operatorname{Im} f = 1$ e:

$$\operatorname{Ker} f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid -x + y + z = 0,\ 2z = 0\} = \mathscr{L}((1,1,0)).$$

2. Si vede che:

$$P(T) = \begin{vmatrix} h - T & 1 & 1 \\ 1 & h - T & 1 \\ -1 & 1 & 1 - T \end{vmatrix} = (1 - T)(h + 1 - T)(h - 1 - T),$$

per cui gli autovalori sono 1, $h + 1$ e $h - 1$. Essi sono tutti distinti di molteplicità algebrica 1 per $h \neq 0, 2$. In particolare, possiamo affermare che per $h \neq 0, 2$ f è semplice ed ammette, dunque, una base di autovettori.

Sia $T = 1$. Sappiamo che $V_1 = \operatorname{Ker} f_1$, dove $f_1 = f - i$ e:

$$M(f_1) = M(f) - I = \begin{pmatrix} h-1 & 1 & 1 \\ 1 & h-1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo per } h \neq 2} \begin{pmatrix} h-1 & 1 & 1 \\ 2-h & h-2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi:

$$V_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (h-1)x + y + z = 0,\ (2-h)x + (h-2)y = 0\} = \mathscr{L}((1,1,-h)).$$

Sia $T = h + 1$. Sappiamo che $V_{h+1} = \operatorname{Ker} f_{h+1}$, dove $f_{h+1} = f - (h+1)i$ e:

$$M(f_{h+1}) = M(f) - (h+1)I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -h \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi:

$$V_{h+1} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid -x + y + z = 0,\ 2z = 0\} = \mathscr{L}((1,1,0)).$$

Sia $T = h - 1$. Sappiamo che $V_{h-1} = \operatorname{Ker} f_{h-1}$, dove $f_{h-1} = f - (h-1)i$ e:

$$M(f_{h-1}) = M(f) - (h-1)I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2-h \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3-h \end{pmatrix}.$$

Quindi:

$$V_{h+1} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0,\ 2y + (3-h)z = 0\} = \mathscr{L}((1-h, h-3, 2)).$$

Quindi, per $h \neq 0, 2$ una base di autovettori è $[(1,1,-h),(1,1,0),(1-h,h-3,2)]$.

Sia $h = 0$. In tal caso gli autovalori sono 0 e 1, con $m_0 = 1$ e $m_1 = 2$. Dal momento che $1 \leq \dim V_0 \leq m_0 = 1$, allora $\dim V_0 = m_0 = 1$. Quindi, f sarà semplice se $\dim V_1 = m_1 = 2$. Sappiamo che $V_1 = \operatorname{Ker} f_1$, dove $f_1 = f - i$ e:

$$M(f_1) = M(f) - I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{\text{riducendo}}{\longmapsto} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque, $\rho(M(f_1)) = 2$ e $\dim V_1 = 3 - \rho(M(f_1)) = 1 < 2 = m_1$. Questo vuol dire che f non è semplice per $h = 0$.

Sia $h = 2$. In tal caso gli autovalori sono 3 e 1, con $m_3 = 1$ e $m_1 = 2$. Dal momento che $1 \leq \dim V_3 \leq m_3 = 1$, allora $\dim V_3 = m_3 = 1$. Quindi, f sarà semplice se $\dim V_1 = m_1 = 2$. Sappiamo che $V_1 = \operatorname{Ker} f_1$, dove $f_1 = f - i$ e:

$$M(f_1) = M(f) - I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{\text{riducendo}}{\longmapsto} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque, $\rho(M(f_1)) = 2$ e $\dim V_1 = 3 - \rho(M(f_1)) = 1 < 2 = m_1$. Questo vuol dire che f non è semplice per $h = 2$.

3. Se $A = M^{\mathscr{B}}(f)$, allora essendo $P_A(T) = P(T)$, gli autovalori sono 1, 2 e 4. Quindi, può essere $h + 1 = 2$ e $h - 1 = 4$, che è impossibile, oppure $h + 1 = 4$ e $h - 1 = 2$, cioè $h = 3$. Quindi, il valore cercato è $h = 3$.

   Alternativamente, è possibile verificare che:

$$M^{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} h-2 & 0 & 1 \\ 0 & h-1 & 0 \\ 3h-9 & h-3 & 4 \end{pmatrix},$$

   per cui deve chiaramente essere $h = 3$.

4. Deve essere:

$$M(g \circ f) = M(g) \cdot M(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h & 1 & 1 \\ 1 & h & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h-2 & 2-h & 1 \\ 1 & h & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -h & h & 1 \end{pmatrix}.$$

   Occorre risolvere il sistema:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} h-2 & 2-h & 1 & 1 \\ 1 & h & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -h & h & 1 & 1 \end{array}\right) \overset{\text{riducendo per } h \neq 1, -1}{\longmapsto} \left(\begin{array}{ccc|c} h-2 & 2-h & 1 & 1 \\ 3-h & 2h-2 & 0 & 0 \\ \dfrac{-h-1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

   Quindi, per $h \neq 1, -1$ occorre risolvere il sistema:

$$\begin{cases} (h-2)x + (2-h)y + z = 1 \\ (3-h)x + (2h-2)y = 0 \\ \dfrac{-h-1}{2}x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 1. \end{cases}$$

   Quindi, per $h \neq 1, -1$ si ha $(g \circ f)^{-1}(1, 1, 1, 1) = \{(0, 0, 1)\}$.

Sia $h = -1$. Allora:

$$\begin{pmatrix} -3 & 3 & 1 & | & 1 \\ 1 & -1 & 1 & | & 1 \\ -1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 1 & -1 & 1 & | & 1 \end{pmatrix} \xmapsto{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} -3 & 3 & 1 & | & 1 \\ 4 & -4 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix},$$

per cui:

$$\begin{cases} -3x + 3y + z = 1 \\ 4x - 4y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x \\ z = 1. \end{cases}$$

Dunque, per $h = -1$ abbiamo $(g \circ f)^{-1}(1,1,1,1) = \{(x, x, 1)\}$.

Sia $h = 1$. Allora:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ -1 & 1 & 1 & | & 1 \\ -1 & 1 & 1 & | & 1 \end{pmatrix} \xmapsto{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 2 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix},$$

per cui:

$$\begin{cases} -x + y + z = 1 \\ 2x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = 1 - y. \end{cases}$$

Dunque, per $h = 1$ abbiamo $(g \circ f)^{-1}(1,1,1,1) = \{(0, y, 1 - y)\}$.

II

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1. Dati la retta:
$$r\colon \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x - y + 3z = 0, \end{cases}$$
il piano $\pi\colon x + 2y + 4z + 1 = 0$ e $P = (1, 0, 1)$, determinare la retta s incidente r, parallela a π e passante per P.

2. Studiare il fascio di coniche del piano $z = 0$ di equazione:
$$x^2 + hy^2 + 2hxy - 4x + 4 = 0,$$
determinando, in particolare, punti base e coniche spezzate.

3. Data la conica:
$$\Gamma\colon \begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ z = 0, \end{cases}$$
determinare il cilindro Q contenente Γ e avente vertice $V = (1, 1, -1, 0)$. Stabilire la natura della conica sezione di Q con il piano $\alpha\colon x + y + z + 1 = 0$.

Soluzione

1. La retta cercata è intersezione del piano π_1 contenente r e passante per P e del piano π_2 parallelo a π e passante per P.

   I piani contenenti r hanno equazione:
$$\lambda(x + y + z - 1) + \mu(2x - y + 3z) = 0.$$

Quando imponiamo il passaggio per P otteniamo $\lambda + 5\mu = 0$. Prendendo $\lambda = 5$ e $\mu = -1$ troviamo l'equazione del piano $\pi_1\colon 3x + 6y + 3z - 1 = 0$.

I piani paralleli a π hanno equazione $\pi\colon x + 2y + 4z + d = 0$. Imponendo il passaggio per P troviamo $d = -5$, per cui $\pi_2\colon x + 2y + 4z - 5 = 0$. Dunque, la retta cercata ha equazioni:

$$s = \pi_1 \cap \pi_2\colon \begin{cases} 3x + 6y + 3z - 1 = 0 \\ x + 2y + 4z - 5 = 0. \end{cases}$$

2. La conica nascosta ha equazione $y(2x + y) = 0$. Le matrici associate al fascio sono:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & h & -2 \\ h & h & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & h \\ h & h \end{pmatrix}.$$

Si ha $|B| = -4h^2$, per cui l'altra conica spezzata del fascio si ottiene per $h = 0$ ed ha equazione $(x - 2)^2 = 0$. I punti base del fascio sono dati da:

$$\begin{cases} (x - 2)^2 = 0 \\ y(x + 2y) = 0 \end{cases}$$

e sono $(2, 0)$ e $(2, -4)$, entrambi contati due volte.

Da $|A| = h - h^2$ vediamo che per $0 < h < 1$ abbiamo delle ellissi, nessuna delle quali è una circonferenza, per $h = 0$ abbiamo una conica spezzata, per $h = 1$ abbiamo una parabola e per $h < 0$ e $h > 1$ abbiamo delle iperboli. In particolare, per $h = -1$ abbiamo un'iperbole equilatera.

3. Il generico punto della conica Γ è $P = (a, b, 0)$, dove $a^2 - b^2 = 1$. La retta PV ha equazioni:

$$x - a = y - b = -z \Rightarrow \begin{cases} a = x + z \\ b = y + z. \end{cases}$$

Sostituendo in $a^2 - b^2 = 1$ otteniamo l'equazione del cilindro Q:

$$Q\colon (x + z)^2 - (y + z)^2 = 1.$$

Si vede facilmente che $V \notin \alpha$, per cui la conica $Q \cap \alpha$ è irriducibile. Dal momento che Γ è chiaramente un'iperbole, il cilindro Q è iperbolico e la conica $Q \cap \alpha$ è anch'essa necessariamente un'iperbole.