CdL in Ingegneria Informatica (A-D e O-Z) - Ingegneria Elettronica (A-D e O-Z) -Ingegneria REA

Prova scritta di **Algebra lineare e Geometria**- 26 Febbraio 2016

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.

I

È dato l'endomorfismo $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che:

$$M(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ h & h+1 & 2 \\ 0 & 0 & h \end{pmatrix}$$

al variare di $h \in \mathbb{R}$.

1. Studiare f, al variare di $h \in \mathbb{R}$, determinando $\operatorname{Ker} f$ e $\operatorname{Im} f$ e le loro equazioni cartesiane.
2. Studiare la semplicità di f al variare di $h \in \mathbb{R}$.
3. Calcolare $f^{-1}(1,1,1)$ al variare di $h \in \mathbb{R}$.
4. Nel caso $h = 1$ determinare la matrice $M(f^{-1})$, essendo f^{-1} l'applicazione inversa di f.

Soluzione

1. Si vede che $|M(f)| = h(h+2)$, per cui per $h \neq 0, -2$ f è un isomorfismo, cioè f è iniettiva e suriettiva e $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^3$ e $\operatorname{Ker} f = \{(0,0,0)\}$.

   Sia $h = 0$. In tal caso:
   $$M(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
   Questa è una matrice ridotta di rango 2, per cui $\dim \operatorname{Im} f = 2$ e una sua base è $[(2,0,0),(1,1,0)]$. Cerchiamo la sua equazione cartesiana:
   $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -2z = 0,$$
   per cui $\operatorname{Im} f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\}$. Inoltre, $\dim \operatorname{Ker} f = 1$ e si ha:
   $$\operatorname{Ker} f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y + z = 0,\ y + 2z = 0\} = \mathscr{L}((1,-4,2)).$$
   Osserviamo che le equazioni precedenti sono equazioni cartesiane di $\operatorname{Ker} f$.

   Sia $h = -2$. In tal caso:
   $$M(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dunque, $\dim \operatorname{Im} f = \rho(M(f)) = 2$ e una sua base è $[(1,-1,0),(1,2,-2)]$. Cerchiamo la sua equazione cartesiana:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -2x - 2y - 3z = 0,$$

per cui $\operatorname{Im} f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + 2y + 3z = 0\}$. Inoltre, $\dim \operatorname{Ker} f = 1$ e si ha:

$$\operatorname{Ker} f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y + z = 0,\ 3z = 0\} = \mathscr{L}((1,-2,0)).$$

Osserviamo che le equazioni precedenti sono equazioni cartesiane di $\operatorname{Ker} f$.

2. Si vede che:

$$P(T) = \begin{vmatrix} 2-T & 1 & 1 \\ h & h+1-T & 2 \\ 0 & 0 & h-T \end{vmatrix} = (h-T)[T^2 - (h+3)T + h + 2],$$

per cui gli autovalori sono $h, h+2, 1$. Essi sono tutti distinti tra loro (e, dunque, tutti di molteplicità algebrica 1) per $h \neq 1, -1$. Quindi, concludiamo subito che per $h \neq 1, -1$ f è semplice.

Sia $h = 1$. In tal caso gli autovalori sono $1, 3$, con $m_1 = 2$ e $m_3 = 1$. Essendo $1 \leq \dim V_3 \leq m_3 = 1$, si ha $\dim V_3 = m_3 = 1$. Dunque, f sarà semplice se accadrà anche che $\dim V_1 = m_1 = 2$. Sappiamo che $V_1 = \operatorname{Ker} f_1$, dove $f_1 = f - i$, e:

$$M(f_1) = M(f) - I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xmapsto{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi, $\dim V_1 = 3 - \rho(M(f_1)) = 3 - 2 = 1 < 2 = m_1$, per cui possiamo dire che per $h = 1$ f non è semplice.

Sia $h = -1$. In tal caso gli autovalori sono $1, -1$, con $m_1 = 2$ e $m_{-1} = 1$. Essendo $1 \leq \dim V_{-1} \leq m_{-1} = 1$, si ha $\dim V_{-1} = m_{-1} = 1$. Dunque, f sarà semplice se accadrà anche che $\dim V_1 = m_1 = 2$. Sappiamo che $V_1 = \operatorname{Ker} f_1$, dove $f_1 = f - i$, e:

$$M(f_1) = M(f) - I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xmapsto{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi, $\dim V_1 = 3 - \rho(M(f_1)) = 3 - 2 = 1 < 2 = m_1$, per cui possiamo dire che per $h = -1$ f non è semplice.

3. Dobbiamo risolvere il sistema:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ h & h+1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & h & 1 \end{array}\right) \xmapsto{\text{riducendo}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ -h-2 & 0 & 1-h & -h \\ 0 & 0 & h & 1 \end{array}\right).$$

Sia $h \neq 0, -2$. Il sistema da risolvere è:

$$\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ (-h-2)x + (1-h)z = -h \\ hz = 1 \end{cases} \xmapsto{\text{riducendo}} \begin{cases} x = \dfrac{h^2 - h + 1}{h^2 + 2h} \\ y = \dfrac{-h^2 + 3h - 4}{h^2 + 2h} \\ z = \dfrac{1}{h}, \end{cases}$$

per cui per $h \neq 0, -2$ abbiamo che:

$$f^{-1}(1,1,1) = \left\{ \left(\frac{h^2 - h + 1}{h^2 + 2h}, \frac{-h^2 + 3h - 4}{h^2 + 2h}, \frac{1}{h} \right) \right\}.$$

Sia $h = 0$. La matrice completa dopo la riduzione effettuata in precedenza diventa:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right),$$

da cui otteniamo che il sistema è impossibile e, dunque, che $f^{-1}(1,1,1) = \emptyset$.

Sia $h = -2$. La matrice completa dopo la riduzione effettuata in precedenza diventa:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \overset{\text{riducendo}}{\longmapsto} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{array}\right),$$

da cui otteniamo che il sistema è impossibile e, dunque, che $f^{-1}(1,1,1) = \emptyset$.

4. Si vede che:

$$M(f^{-1}) = M(f)^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{2}{3} & -\dfrac{1}{3} & 0 \\ -\dfrac{1}{3} & \dfrac{2}{3} & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

II

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1. Dati i piani $\pi_1\colon x + y - z - 1 = 0$ e $\pi_2\colon 2x - y + 2z = 0$ e il punto $P = (1,1,-1)$, determinare:
   (a) il piano π passante per $P = (1,1,-1)$ e ortogonale a π_1 e π_2,
   (b) la retta r passante per P e parallela a π_1 e π_2,
   (c) la retta s passante per P e perpendicolare al piano π_1.
2. Determinare e studiare il fascio di coniche del piano $z = 0$ passanti per i punti $A = (-2,0)$, $B = (0,0)$, $C = (0,1)$ e $D = (1,2)$.
3. Studiare, al variare di $h \in \mathbb{R}$, le quadriche di equazione:

$$x^2 + 2hy^2 + 2hyz - z^2 + 2y - 1 = 0.$$

Soluzione

1. Un vettore perpendicolare al piano π_1 è quello di componenti $(1,1,-1)$ e uno perpendicolare al piano π_2 è quello di componenti $(2,-1,2)$. Dunque, se (a,b,c) sono le componenti di un vettore perpendicolare al piano π, deve essere:

$$\begin{cases} a + b - c = 0 \\ 2a - b + 2c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -4a \\ c = -3a. \end{cases}$$

Dunque, $(1,-4,-3)$ sono le componenti di un vettore perpendicolare a π e si ha:

$$\pi\colon x - 1 - 4(y-1) - 3(z+1) = 0 \Rightarrow \pi\colon x - 4y - 3z = 0.$$

La retta r è perpendicolare a π, per cui $(1,-4,-3)$ sono parametri direttori di r e si ha:

$$r\colon x - 1 = \frac{y-1}{-4} = \frac{z+1}{-3} \Rightarrow r\colon \begin{cases} 4x + y - 5 = 0 \\ 3x + z - 2 = 0. \end{cases}$$

La retta s ha $(1,1,-1)$ come parametri direttori, per cui:

$$s\colon x - 1 = y - 1 = -(z+1) \Rightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ x + z = 0. \end{cases}$$

2. Le rette da considerare sono $AB\colon y = 0$ e $CD\colon x - y + 1 = 0$, $AC\colon x - 2y + 2 = 0$ e $BD\colon 2x - y = 0$, $AD\colon 2x - 3y + 4 = 0$ e $BC\colon x = 0$. Dunque, le coniche spezzate del fascio sono quelle din equazioni $y(x - y + 1) = 0$, $(x - 2y + 2)(2x - y) = 0$ e $x(2x - 3y + 4) = 0$. Per scrivere l'equazione del fascio usiamo due di queste tre coniche:

$$hy(x - y + 1) + x(2x - 3y + 4) = 0 \Rightarrow 2x^2 + (h - 3)xy - hy^2 + 4x + hy = 0.$$

Le matrici associate sono:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & \dfrac{h-3}{2} & 2 \\ \dfrac{h-3}{2} & -h & \dfrac{h}{2} \\ 2 & \dfrac{h}{2} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & \dfrac{h-3}{2} \\ \dfrac{h-3}{2} & -h \end{pmatrix}.$$

Dal momento che $|B| = \frac{h^2+2h}{2}$, concludiamo troviamo le coniche spezzate per $h = 0$, caso in cui abbiamo $x(2x - 3y + 4) = 0$, e per $h = -2$, caso in cui abbiamo $(x - 2y + 2)(2x - y) = 0$. Notiamo che la conica spezzata $y(x - y + 1) = 0$ è quella nascosta. Inoltre, $|A| = \frac{-h^2-2h-9}{4}$. Dal momento che $|A| < 0$ per ogni $h \in \mathbb{R}$, concludiamo che per $h \neq 0, -2$ le coniche sono tutte delle iperboli. Inoltre, essendo $\mathrm{Tr}(A) = 2 - h$, per $h = 2$ abbiamo un'iperbole equilatera.

3. Le matrici associate sono:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2h & h & 1 \\ 0 & h & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2h & h \\ 0 & h & -1 \end{pmatrix}.$$

Si ha $|B| = (h+1)^2$ e $|A| = -2h - h^2$. Dunque, per $h = 0$ si ha $|B| = 1 > 0$ e $|A| = 0$ e abbiamo un paraboloide iperbolico. Per $h = -2$ si ha $|B| = 1 > 0$ e $|A| = 0$ e abbiamo un paraboloide iperbolico. Per $h = -1$ si ha $|B| = 0$ e $|A| \neq 0$ e abbiamo un cono.

Sia, ora, $h \neq 0, -1, -2$. Si vede che:

$$P_A(T) = \begin{vmatrix} 1-T & 0 & 0 \\ 0 & 2h-T & h \\ 0 & h & -1-T \end{vmatrix} = -T^3 + 2hT^2 + (h^2+1)T - h^2 - 2h.$$

Dal momento che il coefficiente di T è positivo per ogni $h \in \mathbb{R}$, concludiamo che non ci sono mai ellissoidi tra queste quadriche, per cui, essendo inoltre $|B| > 0$ per ogni $h \neq 0, -1, -2$, concludiamo che per $h \neq 0, -1, -2$ abbiamo degli iperboloidi iperbolici.