CdL in Ingegneria Industriale (A-E e F-O)

Prova scritta di **Algebra lineare e Geometria**- 25 Febbraio 2016

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.

I

È assegnata l'applicazione lineare $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definita dalle seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} f(1,1,1) &= (h+10, h, 2h+1, -1) \\ f(0,-1,1) &= (h+1, 9, 1, 8) \\ f(0,1,0) &= (3,-3,h,-3) \end{aligned}$$

al variare di $h \in \mathbb{R}$.

1. Studiare f, al variare di $h \in \mathbb{R}$, determinando in ciascun caso $\operatorname{Ker} f$ e $\operatorname{Im} f$.
2. Calcolare $f^{-1}(0,0,1,0)$ al variare di $h \in \mathbb{R}$.
3. Detta $p\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da $p(x,y,z,t) = (y,z,t)$, determinare la matrice associata alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ dell'applicazione lineare $\varphi = p \circ f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.
4. Determinare il valore di $h \in \mathbb{R}$ per cui φ ammette l'autovalore -1.
5. Per il valore di h di cui al punto 4 determinare una base di autovettori di φ.

*S*oluzione

1. Da:

$$\begin{aligned} f(1,1,1) &= (h+10, h, 2h+1, -1) \\ f(0,-1,1) &= (h+1, 9, 1, 8) \\ f(0,1,0) &= (3,-3,h,-3) \end{aligned}$$

otteniamo facilmente che:

$$M(f) = \begin{pmatrix} 3 & 3 & h+4 \\ h-3 & -3 & 6 \\ 0 & h & h+1 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo il minore:

$$\begin{vmatrix} 3 & 3 & h+4 \\ h-3 & -3 & 6 \\ -3 & -3 & 5 \end{vmatrix} = -3h(h+9).$$

Dunque, per $h \neq 0, -9$ il rango è certamente 3, per cui $\dim \operatorname{Im} f = 3$ e una sua base è $[(3, h-3, 0, -3), (3, -3, h, -3), (h+4, 6, h+1, 5)]$. Inoltre, $\dim \operatorname{Ker} f = 3 - \rho(M(f)) = 0$, per cui f è iniettiva e $\operatorname{Ker} f = \{(0,0,0)\}$.

Sia $h = 0$. In tal caso:

$$M(f) = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 4 \\ -3 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix} \xmapsto{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque, $\dim \operatorname{Im} f = \rho(M(f)) = 2$ e una sua base è $[(3,-3,0,-3),(4,6,1,5)]$. Inoltre, $\dim \operatorname{Ker} f = 3 - \dim \operatorname{Im} f = 1$ e:

$$\operatorname{Ker} f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x+3y+4z = 0,\ 10z = 0\} = \mathscr{L}((1,-1,0)).$$

Sia $h = -9$. In tal caso:

$$M(f) = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -5 \\ -12 & -3 & 6 \\ 0 & -9 & -8 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix} \overset{\text{riducendo}}{\longmapsto} \begin{pmatrix} 3 & 3 & -5 \\ 0 & 9 & -11 \\ 0 & 0 & -19 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque, $\dim \operatorname{Im} f = \rho(M(f)) = 3$ e una sua base è $[(3,-12,0,-3),(3,-3,-9,-3),(-5,6,-8,5)]$. Inoltre, $\dim \operatorname{Ker} f = 3 - \rho(M(f)) = 0$, per cui f è iniettiva e $\operatorname{Ker} f = \{(0,0,0)\}$.

2. Dobbiamo risolvere il sistema la cui matrice completa associata è:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & h+4 & 0 \\ h-3 & -3 & 6 & 0 \\ 0 & h & h+1 & 1 \\ -3 & -3 & 5 & 0 \end{array}\right).$$

Il suo determinante è:

$$\begin{vmatrix} 3 & 3 & h+4 & 0 \\ h-3 & -3 & 6 & 0 \\ 0 & h & h+1 & 1 \\ -3 & -3 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 3h(h+9).$$

Ciò vuol dire che per $h \neq 0, -9$ il sistema è impossibile e $f^{-1}(0,0,1,0) = \emptyset$.

Sia $h = 0$. La matrice completa associata è:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & 4 & 0 \\ -3 & -3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -3 & -3 & 5 & 0 \end{array}\right) \overset{\text{riducendo}}{\longmapsto} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

per cui anche in questo caso il sistema è impossibile e $f^{-1}(0,0,1,0) = \emptyset$.

Sia $h = -9$. La matrice completa associata è:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & -5 & 0 \\ -12 & -3 & 6 & 0 \\ 0 & -9 & -8 & 1 \\ -3 & -3 & 5 & 0 \end{array}\right) \overset{\text{riducendo}}{\longmapsto} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & -5 & 0 \\ 0 & -9 & -11 & 0 \\ 0 & 0 & -19 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

In tal caso il sistema ammette una sola soluzione:

$$\begin{cases} 3x+3y-5z = 0 \\ 9y - 11z = 0 \\ -19z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{4}{171} \\ y = -\dfrac{11}{171} \\ z = -\dfrac{1}{19}. \end{cases}$$

Dunque:

$$f^{-1}(0,0,1,0) = \left\{ \left(-\frac{4}{171}, -\frac{11}{171}, -\frac{1}{19} \right) \right\}.$$

3. È facile notare che:

$$M(\varphi) = M(p)M(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 3 & h+4 \\ h-3 & -3 & 6 \\ 0 & h & h+1 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h-3 & -3 & 6 \\ 0 & h & h+1 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}.$$

4. Il polinomio caratteristico di φ è:

$$P(T) = \begin{vmatrix} h-3-T & -3 & 6 \\ 0 & h-T & h+1 \\ -3 & -3 & 5-T \end{vmatrix}.$$

Dobbiamo imporre che sia $P(-1) = 0$, cioè che:

$$\begin{vmatrix} h-2 & -3 & 6 \\ 0 & h+1 & h+1 \\ -3 & -3 & 6 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 9(h+1)^2 = 0.$$

Dunque, il valore di h cercato è $h = -1$.

5. Sia $h = -1$. In tal caso:

$$P(T) = \begin{vmatrix} -4-T & -3 & 6 \\ 0 & -1-T & 0 \\ -3 & -3 & 5-T \end{vmatrix} = (-1-T)^2(2-T).$$

Dunque, gli autovalori sono -1 e 2, con $m_{-1} = 2$ e $m_2 = 1$. φ è semplice se $\dim V_{-1} = m_{-1} = 2$ e $\dim V_2 = m_2 = 1$. Essendo $1 \leq \dim V_2 \leq m_2 = 1$, concludiamo che $\dim V_2 = m_2 = 1$. Dunque, possiamo dire che φ è semplice se $\dim V_{-1} = m_{-1} = 2$.

Sia $T = -1$. Sappiamo che $V_{-1} = \operatorname{Ker} \varphi_{-1}$ e:

$$M(\varphi_{-1}) = M(\varphi) + I = \begin{pmatrix} -3 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & -3 & 6 \end{pmatrix} \overset{\text{riducendo}}{\longmapsto} \begin{pmatrix} -3 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque, $\rho(M(\varphi_{-1})) = 1$ e $\dim V_{-1} = 3 - 1 = 2 = m_{-1}$. Dunque, per $h = -1$ φ è semplice. Calcoliamo l'autospazio V_{-1}:

$$V_{-1} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid -3x - 3y + 6z = 0\} = \mathscr{L}((1, -1, 0), (0, 2, 1)).$$

Sia $T = 2$. In tal caso, $V_2 = \operatorname{Ker} \varphi_2$ e:

$$M(\varphi_2) = M(\varphi) - 2I = \begin{pmatrix} -6 & -3 & 6 \\ 0 & -3 & 0 \\ -3 & -3 & 3 \end{pmatrix} \overset{\text{riducendo}}{\longmapsto} \begin{pmatrix} -6 & -3 & 6 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Inoltre:

$$V_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid -6x - 3y + 6z = 0,\ -3y = 0\} = \mathscr{L}((1, 0, 1)).$$

Dunque, una base di autovettori è $[(1, -1, 0), (0, 2, 1), (1, 0, 1)]$.

II

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1. Determinare le equazioni della retta r proiezione ortogonale della retta $s\colon 3x + 2y + z - 1 = x - y + z = 0$ sul piano $z = 0$

2. Determinare e studiare il fascio di coniche del piano $z = 0$ tangenti nell'origine all'asse $\vec{y}$ e passanti per i punti $(1, -1, 0)$ e $(1, 2, 0)$.

3. Studiare, al variare del parametro reale h, le quadriche di equazione:

$$x^2 - 4xy + 4y^2 + 2hxz + 2x + 2(h-1)z = 0.$$

Soluzione

1. Sia π il piano contenente s e perpendicolare al piano $z = 0$. La retta r sarà l'intersezione di π con $z = 0$. Il fascio di piani contenenti s hanno equazione:

$$\lambda(3x + 2y + z - 1) + \mu(x - y + z) = 0 \Rightarrow (3\lambda + \mu)x + (2\lambda - \mu)y + (\lambda + \mu)z - \lambda = 0.$$

Vogliamo che i vettori di componenti $(3\lambda + \mu, 2\lambda - \mu, \lambda + \mu)$ e $(0, 0, 1)$ siano perpendicolari tra loro. Dunque, deve essere $\lambda + \mu = 0$, per cui possiamo prendere $\lambda = 1$ e $\mu = -1$ e $\pi\colon 2x + 3y - 1 = 0$. Quindi, la retta cercata è:

$$r\colon \begin{cases} 2x + 3y - 1 = 0 \\ z = 0. \end{cases}$$

2. Siano $A = (1, -1)$ e $B = (1, 2)$. Le rette da considerare sono $AB\colon x = 1$, $AO\colon x + y = 0$, $BO\colon 2x - y = 0$ e le coniche spezzate del fascio sono $x(x-1) = 0$ e $(x+y)(2x-y) = 0$. Dunque, l'equazione del fascio è:

$$(x+y)(2x-y) + hx(x-1) = 0 \Rightarrow (h+2)x^2 + xy - y^2 - hx = 0.$$

Sappiamo già che le uniche coniche spezzate del fascio sono quelle utilizzate per scrivere la sua equazione. Quindi, possiamo dire che $|B| = 0$ solo per $h = 0$. Possiamo direttamente calcolare:

$$|A| = \begin{vmatrix} h+2 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 \end{vmatrix} = -h - \frac{9}{4}.$$

Dunque, per $h < -\frac{9}{4}$ abbiamo delle ellissi, tutte reali, perché i punti base sono reali, tra le quali non ci sono circonferenze. Per $h = -\frac{9}{4}$ abbiamo una parabola. Per $h > -\frac{9}{4}$, $h \neq 0$, abbiamo delle iperboli; in particolare, essendo $\mathrm{Tr}(A) = h + 1$, per $h = -1$ abbiamo un'iperbole equilatera.

3. Le matrici associate sono:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & h & 1 \\ -2 & 4 & 0 & 0 \\ h & 0 & 0 & h-1 \\ 1 & 0 & h-1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & h \\ -2 & 4 & 0 \\ h & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si vede facilmente che $|B| = 8h(h-1)$ e $|A| = -4h^2$.

Sia $h = 0$. In tal caso $|B| = |A| = 0$. Tuttavia:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xmapsto{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

per cui $\rho(B) = 3$ e la quadrica è in questo caso un cilindro.

Sia $h = 1$. In tal caso, $|B| = 0$ e $|A| \neq 0$, per cui la quadrica è un cono.

Sia $h \neq 0, 1$. In tal caso, $|B|, |A| \neq 0$. Inoltre:

$$P_A(T) = \begin{vmatrix} 1-T & -2 & h \\ -2 & 4-T & 0 \\ h & 0 & -T \end{vmatrix} = -T^3 + 5T^2 + h^2T - 4h^2,$$

i cui coefficienti non sono a segni alterni e non sono tutti negativi. Ciò vuol dire che la quadrica è sempre un iperboloide. In particolare, per $0 < h < 1$ si ha $|B| < 0$ e la quadrica è un iperboloide ellittico. Per $h < 0$ e $h > 1$ abbiamo $|B| > 0$ e abbiamo un iperboloide iperbolico.