CdL in Ingegneria Informatica (A-D e O-Z) - Ingegneria REA
Ingegneria Elettronica (A-D e O-Z) - Ingeneria Industriale (A-E e F-O)
Ingegneria Gestionale - Ingegneria Meccanica - Ingegneria Elettrica

Prova scritta di **Algebra lineare e Geometria**- 25 Novembre 2016

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.

I

È assegnato l'endomorfismo $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito dalle assegnazioni:

$$\begin{aligned} f(1,1,1) &= (2h-3, 2h-3, h) \\ f(0,1,1) &= (2h-5, 2h-4, h) \\ f(1,0,1) &= (2h-4, 2h-5, h), \end{aligned}$$

al variare di $h \in \mathbb{R}$.

1. Studiare f, al variare di $h \in \mathbb{R}$, determinando $\operatorname{Ker} f$ e $\operatorname{Im} f$ e le loro equazioni cartesiane.
2. Studiare la semplicità di f al variare di $h \in \mathbb{R}$, determinando una base di autovettori indipendente dal parametro.
3. Dato $V = \mathscr{L}((1,1,2),(2,-1,1))$, determinare l'equazione cartesiana di V e calcolare $f^{-1}(V)$.
4. Per $h = 2$ mostrare che f è invertibile e determinare $M(f^{-1})$.

Soluzione

1. Dalle assegnazioni:

$$\begin{aligned} f(1,1,1) &= (2h-3, 2h-3, h) \\ f(0,1,1) &= (2h-5, 2h-4, h) \\ f(1,0,1) &= (2h-4, 2h-5, h), \end{aligned}$$

otteniamo:

$$M(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2h-6 \\ 1 & 2 & 2h-6 \\ 0 & 0 & h \end{pmatrix}.$$

Dunque, $|M(f)| = 3h$, per cui per $h \neq 0$ f è un isomorfismo, cioè f è iniettiva e suriettiva , $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^3$ e $\operatorname{Ker} f = \{(0,0,0)\}$.

Sia $h = 0$. In tal caso:

$$M(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -6 \\ 1 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{\text{riducendo}}{\longmapsto} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -6 \\ -3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

per cui $\dim \operatorname{Im} f = \rho(M(f)) = 2$ e una sua base è $[(2,1,0),(1,2,0)]$. La sua equazione cartesiana è:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 3z = 0,$$

per cui $\operatorname{Im} f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\}$. Inoltre, $\dim \operatorname{Ker} f = 3 - \dim \operatorname{Im} f = 1$ e:

$$\operatorname{Ker} f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y - 6z = 0,\ -3x + 6z = 0\} = \mathscr{L}((2,2,1)).$$

2. Si vede che:
$$P(T) = \begin{vmatrix} 2-T & 1 & 2h-6 \\ 1 & 2-T & 2h-6 \\ 0 & 0 & h-T \end{vmatrix} = (h-T)(3-T)(1-T),$$
per cui gli autovalori sono $h, 3, 1$. In particolare, essi sono distinti a due a due e tutti di molteplicità algebrica 1 per $h \neq 1, 3$. Cerchiamo una base di autovettori in questo caso.
Sia $T = 1$. Sappiamo che $V_1 = \operatorname{Ker} f_1$, dove $f_1 = f - i$ e:
$$M(f_1) = M(f) - I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2h-6 \\ 1 & 1 & 2h-6 \\ 0 & 0 & h-1 \end{pmatrix} \overset{\text{riducendo}}{\longmapsto} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2h-6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h-1 \end{pmatrix}.$$
Dal momento che $h \neq 1$:
$$V_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + (2h-6)z = 0,\ (h-1)z = 0\} = \mathscr{L}((1, -1, 0)).$$
Sia $T = 3$. Sappiamo che $V_3 = \operatorname{Ker} f_3$, dove $f_3 = f - 3i$ e, poiché $h \neq 3$:
$$M(f_3) = M(f) - 3I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2h-6 \\ 1 & -1 & 2h-6 \\ 0 & 0 & h-3 \end{pmatrix} \overset{\text{riducendo}}{\longmapsto} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2h-6 \\ 0 & 0 & 4h-12 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
Dal momento che $h \neq 3$:
$$V_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid -x + y + (2h-6)z = 0,\ (4h-12)z = 0\} = \mathscr{L}((1, 1, 0)).$$
Sia $T = h$. Sappiamo che $V_h = \operatorname{Ker} f_h$, dove $f_h = f - hi$ e, poiché $h \neq 3$:
$$M(f_h) = M(f) - hI = \begin{pmatrix} 2-h & 1 & 2h-6 \\ 1 & 2-h & 2h-6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{\text{riducendo}}{\longmapsto} \begin{pmatrix} 2-h & 1 & 2h-6 \\ h-1 & 1-h & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
Dal momento che $h \neq 1, 3$:
$$V_h = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (2-h)x + y + (2h-6)z = 0,\ (h-1)x + (1-h)y = 0\} = \mathscr{L}((2, 2, 1)).$$
Dunque, per $h \neq 1, 3$ una base di autovettori è $[(1, -1, 0), (1, 1, 0), (2, 2, 1)]$. Dal momento che h non compare, questa sarà una base di autovettori anche per $h = 1$ e $h = 3$ ed è la base di autovettori indipendente dal parametro che stavamo cercando e f è semplice per ogni h.

3. L'equazione cartesiana di V è data da:
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 3x + 3y - 3z = 0.$$
Dunque, $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0\}$. Inoltre, da:
$$M(f) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2h-6 \\ 1 & 2 & 2h-6 \\ 0 & 0 & h \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + y + (2h-6)z \\ x + 2y + (2h-6)z \\ hz \end{pmatrix}$$
otteniamo che:
$$f(x, y, z) = (2x + y + (2h-6)z, x + 2y + (2h-6)z, hz).$$
Quindi:
$$f^{-1}(V) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x, y, z) \in V\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + (h-4)z = 0\}.$$
In particolare, osserviamo che $\dim f^{-1}(V) = 2$ per ogni h.

4. Sia $h = 2$. Sappiamo che:
$$M(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$
per cui, essendo $|M(f)| = 6 \neq 0$, $M(f)$ è invertibile e si ha:
$$M(f^{-1}) = M(f)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

II

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1. Dati la retta:
$$r\colon \begin{cases} x + y - z - 1 = 0 \\ 2x - y + z - 2 = 0, \end{cases}$$
il piano $\pi\colon x + y = 0$ e $P = (1, 0, 0)$, determinare il punto P' simmetrico di P rispetto al piano π e la retta r' simmetrica di r rispetto a π.

2. Determinare la conica del piano $z = 0$ passante per i punti $A = (1, 0)$, $B = (0, -1)$, $C = (1, 1)$, $D = (0, 2)$ ed $E = (-1, 1)$, stabilendone la natura e determinandone centro e assi di simmetria.

3. Studiare, al variare di $h \in \mathbb{R}$, le quadriche di equazione:
$$2x^2 + 2y^2 + 2xy + hz^2 - 2z + 1 = 0.$$

Soluzione

1. La retta s passante per P e perpendicolare a π ha equazioni:
$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = t \\ z = 0, \end{cases}$$
per cui il punto $H = s \cap \pi$ è:
$$H = s \cap \pi\colon \begin{cases} x = 1 + t \\ y = t \\ z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = -\frac{1}{2} \\ z = 0. \end{cases}$$
Dunque, $H = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0)$ e il simmetrico $P' = (a, b, c)$ di P rispetto a π è tale che H è il punto medio di P e P'. Dunque, deve essere:
$$\begin{cases} \frac{a+1}{2} = \frac{1}{2} \\ \frac{b}{2} = -\frac{1}{2} \\ \frac{c}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = -1 \\ c = 0. \end{cases}$$

Dunque, $P' = (0, -1, 0)$. Osserviamo che $P \in r$, per cui $P' \in r'$. Cerchiamo $K = r \cap \pi$:

$$K = r \cap \pi\colon \begin{cases} x + y - z - 1 = 0 \\ 2x - y + z - 2 = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ z = -1, \end{cases}$$

per cui $K = (1, -1, -1)$. Dunque, $r = KP'$ e ha equazioni:

$$r'\colon \begin{cases} x + z = 0 \\ y = -1. \end{cases}$$

2. Il fascio di coniche passanti per A, B, C e D ha equazione:

$$\lambda(x - y - 1)(x + y - 2) + \mu(x - 1)x = 0.$$

Imponendo il passaggio per E otteniamo $6\lambda + 2\mu = 0$, per cui la conica cercata ha equazione:

$$2x^2 + y^2 - y + 2 = 0.$$

Le matrici associate sono:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Essendo $|B| = \frac{7}{2}$ e $|A| = 2 > 0$, la conica è un'ellisse. Il centro di simmetria è dato da:

$$\begin{cases} 2x = 0 \\ y - \frac{1}{2} = 0, \end{cases}$$

per cui esso è il punto $C = (0, \frac{1}{2})$. Dal momento che nell'equazione della conica $a_{12} = 0$, gli assi di simmetria sono paralleli agli assi cartesiani e passano per C, per cui essi sono le rette $x = 0$ e $y = \frac{1}{2}$.

3. Le matrici associate sono:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & h \end{pmatrix}.$$

Dunque, $|B| = 3h - 3$ e $|A| = 3h$. Ciò implica che per $h = 1$ abbiamo un cono e per $h = 0$ abbiamo un paraboloide ellittico.

Sia $h \neq 1, 0$, per cui $|B| \neq 0$ e $|A| \neq 0$. Si vede che:

$$P_A(T) = \begin{vmatrix} 2 - T & 1 & 0 \\ 1 & 2 - T & 0 \\ 0 & 0 & h - T \end{vmatrix} = (h - T)(3 - T)(1 - T),$$

per cui gli autovalori di A sono $h, 1, 3$, per cui essi sono concordi per $h > 0$ e discordi per $h < 0$. Quindi, per $h > 0$ abbiamo degli ellissoidi e per $h < 0$ abbiamo degli iperboloidi. In particolare, per $h > 1$ si ha $|B| > 0$ e $|A| \neq 0$ e abbiamo degli ellissoidi immaginari; per $0 < h < 1$ si ha $|B| < 0$ e $|A| \neq 0$ e abbiamo degli ellissoidi reali e per $h < 0$ si ha $|B| < 0$ e $|A| \neq 0$ e abbiamo degli iperboloidi ellittici.