CdL in Ingegneria Industriale (A-E e F-O)

Prova scritta di **Algebra lineare e Geometria**- 23 Giugno 2016

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.

Compito A

I

Siano $v_1 = (2,0,2,0)$, $v_2 = (0,1,0,1)$ e $v_3 = (0,0,2,0) \in \mathbb{R}^4$ e sia $V = \mathscr{L}(v_1, v_2, v_3)$. È assegnata l'applicazione lineare $f\colon V \to V$ definita dalle seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} f(v_1) &= (2-2h, -4h, 2-2h, -4h) \\ f(v_2) &= (h, 2h+1, h, 2h+1) \\ f(v_3) &= (-2h, -2h, 2, -2h) \end{aligned}$$

al variare di $h \in \mathbb{R}$.

1. Studiare f, al variare di $h \in \mathbb{R}$, determinando in ciascun caso $\operatorname{Ker} f$ e $\operatorname{Im} f$.
2. Nel caso $h = 1$ calcolare $f^{-1}(1,1,1,1)$.
3. Determinare il valore di h per cui f ammette gli autovalori 1 e 2.
4. Per il valore di h di cui al punto 3 verificare che f è semplice e determinare una base di autovettori di V per f.

Soluzione

1. Si vede che $\mathscr{A} = [v_1, v_2, v_3]$ è una base di V e che $V = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid y - t = 0\}$. Quindi, preso $(x,y,z,y) \in V$, abbiamo:

$$(x,y,z,y) = av_1 + bv_2 + cv_3 = a(2,0,2,0) + b(0,1,0,1) + c(0,0,2,0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a = x \\ b = y \\ 2a + 2c = z \\ b = t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{x}{2} \\ b = y \\ c = \dfrac{-x+z}{2}. \end{cases}$$

Dunque, $[(x,y,z,y)]_{\mathscr{A}} = (\frac{x}{2}, y, \frac{-x+z}{2})$. Ciò implica che:

$$M^{\mathscr{A}}(f) = \begin{pmatrix} 1-h & \dfrac{h}{2} & -h \\ -4h & 2h+1 & -2h \\ 0 & 0 & h+1 \end{pmatrix}.$$

Inoltre, $|M^{\mathscr{A}}(f)| = (h+1)^2$, per cui per $h \neq -1$ f è un isomorfismo, cioè f è iniettiva, il che implica $\operatorname{Ker} f = \{(0,0,0,0)\}$, ed è suriettiva, il che implica che $\operatorname{Im} f = V$.

Sia $h = -1$. In tal caso:

$$M^{\mathscr{A}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & -\dfrac{1}{2} & 1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{\text{riducendo}}{\longmapsto} \begin{pmatrix} 2 & -\dfrac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

per cui $\dim \operatorname{Im} f = \rho(M^{\mathscr{A}}(f)) = 1$ e $\operatorname{Im} f = \mathscr{L}((f(v_1))) = \mathscr{L}((4,4,4,4)) = \mathscr{L}(1,1,1,1)$. Inoltre, $\dim \operatorname{Ker} f = 3 - \dim \operatorname{Im} f = 2$ e si ha:

$$\begin{aligned}\operatorname{Ker} f = \{v \in V \mid [v]_{\mathscr{A}} = (a,b,c),\ 2a - \tfrac{1}{2}b + c = 0\} &= \\ = \{v \in V \mid [v]_{\mathscr{A}} = (a, 4a+2c, c)\} = \mathscr{L}(v_1 + 4v_2, 2v_2 + v_3) &= \\ = \mathscr{L}((2,4,2,4),(0,2,2,2)) = \mathscr{L}((1,2,1,2),(0,1,1,1)).&\end{aligned}$$

2. Sia $h = 1$. Allora, dal momento che $[(1,1,1,1)]_{\mathscr{A}} = (\frac{1}{2}, 1, 0)$, per calcolare $f^{-1}(1,1,1,1)$ occorre risolvere il sistema la cui matrice completa è:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ -4 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -4 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right).$$

Dunque:

$$\begin{cases} -4a + 3b - 2c = 1 \\ \frac{1}{2}b - c = \frac{1}{2} \\ 2c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = 1 \\ c = 0. \end{cases}$$

Perciò:

$$f^{-1}(1,1,1,1) = \{\tfrac{1}{2}v_1 + v_2\} = \{(1,1,1,1)\}.$$

3. Sappiamo che:

$$P(T) = \begin{vmatrix} 1-h-T & \frac{h}{2} & -h \\ -4h & 2h+1-T & -2h \\ 0 & 0 & h+1-T \end{vmatrix}.$$

$T = 1$ è autovalore se e solo se $P(1) = 0$, cioè se e solo se:

$$\begin{vmatrix} -h & \frac{h}{2} & -h \\ -4h & 2h & -2h \\ 0 & 0 & h \end{vmatrix} = 0.$$

Osserviamo che ciò avviene per ogni h. Dunque, $T = 1$ è autovalore per ogni valore di $h \in \mathbb{R}$.

$T = 2$ è autovalore se e solo se $P(2) = 0$, cioè se e solo se:

$$\begin{vmatrix} -h-1 & \frac{h}{2} & -h \\ -4h & 2h-1 & -2h \\ 0 & 0 & h-1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -(h-1)^2 = 0 \Leftrightarrow h = 1.$$

Dunque, possiamo dire che 1 e 2 sono entrambi autovalori per f nel caso $h = 1$.

4. Sia $h = 1$. Allora:

$$P(T) = \begin{vmatrix} -T & \frac{1}{2} & -1 \\ -4 & 3-T & -2 \\ 0 & 0 & 2-T \end{vmatrix} = (2-T)(T^2 - 3T + 2).$$

Dunque, gli autovalori sono $T = 1$ e $T = 2$ con $m_1 = 1$ e $m_2 = 2$. Sappiamo che $1 \le \dim V_1 \le m_1 = 1$, per cui $\dim V_1 = m_1 = 1$, mentre $1 \le \dim V_2 \le m_2 = 2$. Ciò implica che f è semplice se $\dim V_2 = m_2 = 2$.

Sia $T = 2$. In tal caso, $V_2 = \operatorname{Ker} f_2$, dove $f_2 = f - 2i$ e:

$$M^{\mathscr{A}}(f_2) = M^{\mathscr{A}}(f) - 2I = \begin{pmatrix} -2 & \frac{1}{2} & -1 \\ -4 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{\text{riducendo}}{\longmapsto} \begin{pmatrix} -2 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque, $\rho(M^{\mathscr{A}}(f_2)) = 1$ e $\dim V_2 = 3 - 1 = 2 = m_2$, per cui f è semplice. Inoltre:

$$\begin{aligned} V_2 = \{v \in V \mid [v]_{\mathscr{A}} = (a,b,c),\ -2a + \tfrac{1}{2}b - c = 0\} = \\ = \{v \in V \mid [v]_{\mathscr{A}} = (a, 4a + 2c, c)\} = \mathscr{L}(v_1 + 4v_2, 2v_2 + v_3) = \\ = \mathscr{L}((2,4,2,4),(0,2,2,2)) = \mathscr{L}((1,2,1,2),(0,1,1,1)). \end{aligned}$$

Sia $T = 1$. In tal caso, $V_1 = \operatorname{Ker} f_1$, dove $f_1 = f - i$ e:

$$M^{\mathscr{A}}(f_1) = M^{\mathscr{A}}(f) - I = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} & -1 \\ -4 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xmapsto{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque:

$$\begin{aligned} V_1 = \{v \in V \mid [v]_{\mathscr{A}} = (a,b,c),\ -a + \tfrac{1}{2}b - c = 0,\ 2c = 0\} = \\ = \{v \in V \mid [v]_{\mathscr{A}} = (a, 2a, 0)\} = \mathscr{L}(v_1 + 2v_2) = \\ = \mathscr{L}((2,2,2,2)) = \mathscr{L}((1,1,1,1)). \end{aligned}$$

Quindi, una base di autovettori per f è $[(1,2,1,2),(0,1,1,1),(1,1,1,1)]$.

II

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1. Date le rette:
$$r\colon \begin{cases} x = 0 \\ y + 2z + 1 = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad s\colon \begin{cases} z = 0 \\ x - y = 0, \end{cases}$$
determinare le equazioni della retta t che le interseca entrambe ed è perpendicolare al piano $\pi\colon x - y = 0$.

2. Sul piano $z = 0$, determinare e studiare il fascio di coniche che passano per $A = (1,0)$, $B = (3,2)$ e $C = (2,2)$ e sono tangenti in C alla retta $x - y = 0$. Determinare vertice e asse della parabola del fascio.

3. Classificare la quadrica di equazione $(2x + z)^2 - y^2 - (z+2)^2 = 0$.

4. Determinare l'equazione del cilindro avente vertice $V = (1, -1, 1, 0)$ e contenente la conica:
$$\Gamma\colon \begin{cases} 4yz - 1 = 0 \\ x - y = 0. \end{cases}$$

Soluzione

1. Siano π_1 il piano contenente r e perpendicolare al piano π e π_2 il piano contenente s e perpendicolare al piano π. I piani contenenti r hanno equazione:
$$\lambda x + \mu(y + 2z + 1) = 0 \Rightarrow \lambda x + \mu y + 2\mu z + 1 = 0.$$
Il piano è perpendicolare a π_1 se $\lambda - \mu = 0$, cioè $\lambda = \mu$. Dunque:
$$\pi_1\colon x + y + 2z + 1 = 0.$$
I piani contenenti s hanno equazione:
$$\lambda z + \mu(x - y) = 0 \Rightarrow \mu x - \mu y + \lambda z = 0.$$
Il piano è perpendicolare a π_2 se $2\mu = 0$, cioè $\mu = 0$. Dunque:
$$\pi_2\colon z = 0.$$
Dunque, la retta cercata è:
$$t = \pi_1 \cap \pi_2\colon \begin{cases} x + y + 2z + 1 = 0 \\ z = 0. \end{cases}$$

2. Dal momento che $AB\colon x-y-1=0$, $AC\colon 2x-y-2=0$ e $BC\colon y-2=0$, il fascio di coniche ha equazione:

$$(x-y)(x-y-1)+h(2x-y-2)(y-2)=0 \Rightarrow x^2+(2h-2)xy+(1-h)y^2-(1+4h)x+y+4h=0.$$

Dal momento che le uniche coniche spezzate sono le due utilizzate per costruire l'equazione del fascio, possiamo dire che $|B|=0$ se e solo se $h=0$. Inoltre:

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & h-1 \\ h-1 & 1-h \end{vmatrix} = -h(h-1).$$

Dunque, per $0<h<1$ abbiamo delle ellissi, nessuna delle quali è una circonferenza; per $h=1$ abbiamo una parabola, mentre per $h=0$ abbiamo una conica spezzata; per $h<0$ e $h>1$ abbiamo delle iperboli e, in particolare, per $h=2$ abbiamo un'iperbole equilatera.

Per $h=1$ la parabola ha equazione $y=-x^2+5x-4$, per cui possiamo subito dire che $V=(\frac{5}{2},-\frac{9}{4})$ e che l'asse di simmetria è la retta $x=\frac{5}{2}$.

3. Le matrici associate sono:

$$B=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque, $|B|=0$ e $|A|=4\neq 0$, il che implica che la quadrica è un cono.

4. Il generico punto della conica Γ è $P=(\alpha,\alpha,\beta)$, dove $4\alpha\beta-1=0$. Quindi, la retta PV ha equazioni:

$$PV\colon x-\alpha=-y+\alpha=z-\beta \Rightarrow \begin{cases} x+y-2\alpha=0 \\ x-z-\alpha+\beta=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha=\dfrac{x+y}{2} \\ \beta=\dfrac{-x+y+2z}{2}. \end{cases}$$

Sostituendo in $4\alpha\beta-1=0$ otteniamo l'equazione della quadrica:

$$4\cdot\frac{x+y}{2}\cdot\frac{-x+y+2z}{2}-1=0 \Rightarrow -x^2+2xz+y^2+2yz-1=0.$$