CdL in Ingegneria Informatica (O-Z) - Ingegneria Elettronica (O-Z)

Algebra Lineare e Geometria: Prova in itinere di **Geometria**- 20 Giugno 2016

Durata della prova: due ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti. Compito A

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1. Sono dati nello spazio i punti $A = (1, 1, 0)$ e $P_\infty = (1, -1, 2, 0)$ e le rette:

$$r\colon \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ z - 2 = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad s\colon \begin{cases} x + 1 = 0 \\ y - z = 0. \end{cases}$$

   (a) Determinare l'equazione della retta $p = AP_\infty$ e il piano α passante per A e perpendicolare alla retta p.

   (b) Determinare la retta t passante per A e ortogonale alle rette r e s.

   (c) Mostrare che le rette r e s sono complanari e determinare il piano π che le contiene.

2. Determinare e studiare il fascio di coniche del piano $z = 0$ passanti per i punti $A = (1, 0)$, $B = (0, 1)$, $C = (-1, 1)$ e $O = (0, 0)$. Determinare l'equazione della conica Γ del fascio passante per il punto improprio $P_\infty = (1, 1, 0)$ e determinare il centro di simmetria di Γ.

3. Classificare le seguenti quadriche:

   (a) $Q_1\colon x^2 + 2xy + 2y^2 - z^2 - 2x + 1 = 0$

   (b) $Q_2\colon x^2 + 2xy + 2y^2 + z^2 + 2x + 1 = 0$

   (c) $Q_3\colon x^2 + 2xy + y^2 - 2z + 1 = 0$

   e, dato il piano $\pi\colon x - y = 0$, determinare la natura della seguente conica:

$$Q_3 \cap \pi\colon \begin{cases} x^2 + 2xy + y^2 - 2z + 1 = 0 \\ x - y = 0. \end{cases}$$

Soluzione

1. (a) La retta p ha parametri direttori $(1, -1, 2)$, per cui è semplice vedere che:

$$p\colon x - 1 = -(y - 1) = \frac{z}{2} \Rightarrow p\colon \begin{cases} 2x - z - 2 = 0 \\ 2y + z - 2 = 0. \end{cases}$$

   Inoltre, il vettore di componenti $(1, -1, 2)$ è ortogonale al piano α, per cui:

$$\alpha\colon x - 1 - (y - 1) + 2z = 0 \Rightarrow \alpha\colon x - y + 2z = 0.$$

   (b) Le rette r e s hanno parametri direttori, rispettivamente, $(1, -1, 0)$ e $(0, 1, 1)$. Detti (l, m, n) parametri direttori della retta t, deve essere:

$$\begin{cases} l - m = 0 \\ m + n = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} l = m \\ n = -m. \end{cases}$$

   Dunque, parametri direttori di t sono $(1, 1, -1)$ e la retta t è data da:

$$t\colon x - 1 = y - 1 = -z \Rightarrow t\colon \begin{cases} x + z - 1 = 0 \\ x - y = 0. \end{cases}$$

(c) Le rette r e s sono complanari poiché:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Prendiamo un punto qualsiasi della retta s, per esempio $B = (-1, 0, 0)$, e osserviamo che $B \notin r$. I piani contenenti r hanno equazione:

$$\lambda(x + y - 1) + \mu(z - 2) = 0.$$

Imponendo il passaggio per B otteniamo $-2\lambda - 2\mu = 0$. Dunque, deve essere $\mu = -\lambda$. Prendendo $\lambda = 1$ e $\mu = -1$ otteniamo l'equazione del piano π:

$$\pi\colon x + y - z + 1 = 0.$$

2. Le rette AB e OC hanno equazioni, rispettivamente, $x + y - 1 = 0$ e $x + y = 0$, per cui la prima conica spezzata del fascio è $(x + y - 1)(x + y) = 0$; le rette AC e OB hanno equazioni $x + 2y - 1 = 0$, rispettivamente, e $x = 0$, per cui la conica $AC \cup OB$ ha equazione $x(x + 2y - 1) = 0$; le rette AO e BC hanno equazioni $y = 0$, rispettivamente, e $y = 1$, per cui la conica $AO \cup BC$ ha equazione $y(y - 1) = 0$. Il fascio di coniche ha equazione:

$$hy(y - 1) + x(x + 2y - 1) = 0 \Rightarrow x^2 + 2xy + hy^2 - x - hy = 0.$$

Le matrici associate sono:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\dfrac{1}{2} \\ 1 & h & -\dfrac{h}{2} \\ -\dfrac{1}{2} & -\dfrac{h}{2} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & h \end{pmatrix}.$$

Dunque, $|B| = \frac{h-h^2}{4}$ e $|A| = h - 1$. Perciò, le coniche spezzate del fascio si trovano per $h = 0$, ottenendo in questo caso $x(x + 2y - 1) = 0$, e $h = 1$, ottenendo in questo caso $(x + y - 1)(x + y) = 0$. Per $h = \infty$ troviamo la conica $y(y - 1) = 0$. Dato che $|A| = h - 1$, per $h > 1$ abbiamo delle ellissi, nessuna delle quali è una circonferenza, per $h = 1$ non abbiamo una parabola, ma una conica spezzata, e per $h < 1$, $h \neq 0$, abbiamo delle iperboli. In particolare, per $h = -1$ abbiamo un'iperbole equilatera.

Cerchiamo la conica del fascio passante per P_∞. Scriviamo, prima di tutto, l'equazione della conica in coordinate omogenee:

$$x^2 + 2xy + hy^2 - xt - hyt = 0.$$

Imponendo il passaggio per P_∞ abbiamo $h = -3$, cioè la conica cercata ha equazione:

$$x^2 + 2xy - 3y^2 - x + 3y = 0.$$

La matrice associata è:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\dfrac{1}{2} \\ 1 & -3 & \dfrac{3}{2} \\ -\dfrac{1}{2} & \dfrac{3}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Il centro di simmetria si ottiene risolvendo il sistema associato alle prime due righe di B:

$$\begin{cases} x+y-\dfrac{1}{2}=0 \\ \\ x-3y+\dfrac{3}{2}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ \\ y=\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Dunque, il centro di simmetria è il punto $C=(0,\dfrac{1}{2})$.

3. (a) Le matrici associate sono:

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Si ha $|B|=1>0$ e $|A|=-1\neq 0$. Inoltre, $P_A(T)=-T^3+2T^2+2T-1$, per cui concludiamo che la quadrica è un iperboloide iperbolico.

(b) Le matrici associate sono:

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si ha $|B|=-1<0$ e $|A|=1\neq 0$. Inoltre, $P_A(T)=-T^3+4T^2-4T+1$, per cui concludiamo che la quadrica è un ellissoide reale.

(c) Le matrici associate sono:

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Si ha $|B|=0$ e $|A|=0$. Inoltre, si vede facilmente che $\rho(B)=3$, per cui la quadrica è un cilindro. Da:

$$\begin{cases} x+y=0 \\ -t=0 \\ -z+t=0 \end{cases}$$

otteniamo che il vertice è il punto $V=(1,-1,0,0)$. Inoltre, è semplice vedere che $V\notin\pi$, per cui la conica $Q_3\cap\pi$ è irriducibile. I punti impropri della conica sono dati da:

$$\begin{cases} x^2+2xy+y^2-2zt+t^2=0 \\ y=x \\ t=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=x \\ t=0 \\ 4x^2=0. \end{cases}$$

Dunque, $Q_3\cap\pi$ è una parabola, perché ha due punti impropri reali e coincidenti.