CdL in Ingegneria Informatica (O-Z) - Ingegneria Elettronica (O-Z)

Algebra Lineare e Geometria: Prova in itinere di **Algebra Lineare**- 2 Maggio 2016

Durata della prova: due ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.

Sono dati i vettori $v_1 = (1,0,0,0)$, $v_2 = (1,0,1,0)$, $v_3 = (0,1,0,-1)$, $v_4 = (0,0,0,1) \in \mathbb{R}^4$ ed è dato l'endomorfismo $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che:

$$\begin{aligned} f(v_1) &= (2,0,0,0) \\ f(v_2) &= (1,0,-1,0) \\ f(v_3) &= (1-h, h+1, 1-h, -h-1) \\ f(v_4) &= (h,-1,h,2), \end{aligned}$$

al variare di $h \in \mathbb{R}$.

1. Studiare f, al variare di $h \in \mathbb{R}$, determinando $\operatorname{Ker} f$ e $\operatorname{Im} f$, determinando le loro equazioni cartesiane.
2. Studiare la semplicità di f al variare di $h \in \mathbb{R}$ e determinare, se possibile, una base di autovettori nei casi $h = 0$ e $h = 1$.
3. Dato $V = \mathscr{L}(v_1, v_2, v_3)$, mostrare che la restrizione $f|_V$ induce un endomorfismo $g\colon V \to V$ per ogni $h \in \mathbb{R}$. Mostrare che $(1,1,1,-1) \in V$ e calcolare $g(1,1,1,-1)$.
4. Date:
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & h & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & h \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -h \end{pmatrix},$$
al variare di $h \in \mathbb{R}$, sia $A = {}^{t}M \cdot N$. Risolvere al variare di $h \in \mathbb{R}$ il sistema $AX = B$.

Soluzione

1. È semplice vedere che:
$$M(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & h \\ 0 & h & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & h \\ 0 & 1-h & 0 & 2 \end{pmatrix}$$
e che $|M(f)| = -2(h+1)$. Dunque, per $h \neq -1$ f è un isomorfismo, cioè f è iniettiva e suriettiva, per cui $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^4$ e $\operatorname{Ker} f = \{(0,0,0,0)\}$.
Sia $h = -1$. In tal caso:
$$M(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xmapsto{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
Dunque, $\rho(M(f)) = 3$ e $\dim \operatorname{Im} f = 3$. In particolare, una base di $\operatorname{Im} f$ è:
$$[(2,0,0,0), (1,-1,1,2), (-1,0,-1,0)].$$

La sua equazione cartesiana è data da:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ x & y & z & t \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2t + 4y = 0.$$

Dunque:

$$\operatorname{Im} f = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2y + t = 0\}.$$

Inoltre, $\dim \operatorname{Ker} f = 4 - \dim \operatorname{Im} f = 1$ e:

$$\operatorname{Ker} f = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x + y - z - t = 0,\ -y - t = 0,\ -z - 2t = 0\} = \mathscr{L}((0, -1, -2, 1)).$$

2. Si vede facilmente che:

$$P(T) = \begin{vmatrix} 2-T & 1 & -1 & h \\ 0 & h-T & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1-T & h \\ 0 & 1-h & 0 & 2-T \end{vmatrix} = (2-T)(-1-T)(1-T)(h+1-T),$$

per cui gli autovalori sono $-1, 1, 2, h+1$. Per $h \neq 0, 1, -2$ essi sono a due a due distinti tra loro, tutti di molteplicità algebrica 1, e f è certamente semplice.

Sia $h = -2$. In tal caso, gli autovalori sono $-1, 1, 2$, con $m_1 = m_2 = 1$ e $m_{-1} = 2$. Certamente si ha $\dim V_1 = m_1 = 1$ e $\dim V_2 = m_2 = 1$, mentre $1 \leq \dim V_{-1} \leq 2 = m_{-1}$. f sarà semplice se accadrà anche che $\dim V_{-1} = 2 = m_{-1}$. Sappiamo che $\dim V_{-1} = \operatorname{Ker} f_{-1}$, dove $f_{-1} = f + i$ e:

$$M(f_{-1}) = M(f) + I = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque, $\rho(M(f_{-1})) = 3$ e $\dim V_{-1} = 4 - 3 = 1 < 2 = m_{-1}$. Quindi, f non è semplice per $h = -2$.

Sia $h = 0$. In tal caso, gli autovalori sono $-1, 1, 2$, con $m_{-1} = m_2 = 1$ e $m_1 = 2$. Certamente si ha $\dim V_{-1} = m_{-1} = 1$ e $\dim V_2 = m_2 = 1$, mentre $1 \leq \dim V_1 \leq 2 = m_1$. f sarà semplice se accadrà anche che $\dim V_1 = 2 = m_1$. Sappiamo che $\dim V_1 = \operatorname{Ker} f_1$, dove $f_1 = f - i$ e:

$$M(f_1) = M(f) - I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque, $\rho(M(f_1)) = 3$ e $\dim V_1 = 4 - 3 = 1 < 2 = m_1$. Quindi, f non è semplice per $h = 0$ e, per la definizione di semplicità, non esiste una base di autovettori per f.

Sia $h = 1$. In tal caso, gli autovalori sono $-1, 1, 2$, con $m_{-1} = m_1 = 1$ e $m_2 = 2$. Certamente si ha $\dim V_{-1} = m_{-1} = 1$ e $\dim V_1 = m_1 = 1$, mentre $1 \leq \dim V_2 \leq 2 = m_2$. f sarà semplice se accadrà anche che $\dim V_2 = 2 = m_2$. Sappiamo che $\dim V_2 = \operatorname{Ker} f_2$, dove $f_2 = f - 2i$ e:

$$M(f_2) = M(f) - 2I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque, $\rho(M(f_2)) = 2$ e $\dim V_2 = 4 - 2 = 2 = m_2$. Quindi, f è semplice per $h = 1$ e possiamo determinare una base di autovettori per f in questo caso. Sappiamo che:

$$V_2 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid y - z + t = 0,\ -y - t = 0\} = \mathscr{L}((1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, -1)).$$

Sappiamo che $V_1 = \operatorname{Ker} f_1$, dove $f_1 = f - i$ e:

$$M(f_1) = M(f) - I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{\text{riducendo}}{\longmapsto} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque:

$$V_1 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z - t = 0,\ -t = 0,\ y - 2z = 0\} = \mathscr{L}((-1, 2, 1, 0)).$$

Sappiamo che $V_{-1} = \operatorname{Ker} f_{-1}$, dove $f_{-1} = f + i$ e:

$$M(f_{-1}) = M(f) + I = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \overset{\text{riducendo}}{\longmapsto} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque:

$$V_{1-} = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 3x + y + z - t = 0,\ 2y - t = 0,\ 3y = 0\} = \mathscr{L}((1, 0, 3, 0)).$$

Possiamo concludere, perciò, che una base di autovettori per f nel caso $h = 1$ è:

$$[(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, -1), (-1, 2, 1, 0), (1, 0, 3, 0)].$$

3. Calcoliamo l'equazione cartesiana di V:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ x & y & z & t \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -y - t = 0.$$

Dunque, $V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid y + t = 0\}$. Dal momento che $f(v_1), f(v_2), f(v_3)$ verificano l'equazione cartesiana di V per ogni h, concludiamo che $f(v_1), f(v_2), f(v_3) \in V$ per ogni $h \in \mathbb{R}$, per cui $f(V) = \mathscr{L}(f(v_1), f(v_2), f(v_3)) \subseteq V$. Ciò implica che $f|_V$ induce un endomorfismo g di V per ogni $h \in \mathbb{R}$. Inoltre, è semplice vedere che anche $(1, 1, 1, -1) \in V$.

Per calcolare $g(1, 1, 1, -1)$ è sufficiente osservare che $g(1, 1, 1, -1) = f(1, 1, 1, -1)$, dove:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & h \\ 0 & h & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & h \\ 0 & 1-h & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-h \\ h+1 \\ -h \\ -1-h \end{pmatrix}.$$

Dunque, $g(1, 1, 1, -1) = f(1, 1, 1, -1) = (2 - h, h + 1, -h, -1 - h)$.

4. È facile vedere che:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ h+1 & 1 & h+1 \\ 2 & h+1 & h \end{pmatrix},$$

per cui il sistema da risolvere ha come matrice completa associata:

$$A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ h+1 & 1 & h+1 & -1 \\ 2 & h+1 & h & -h \end{array}\right).$$

Si vede che $|A| = h^2 - 4$, per cui per $h \neq 2, -2$ possiamo concludere che il sistema ammette una sola soluzione ed è possibile usare il Teorema di Cramer:

$$\begin{cases} x = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & h+1 \\ -h & h+1 & h \end{vmatrix}}{h^2-4} = -\dfrac{1}{h-2} \\ y = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ h+1 & -1 & h+1 \\ 2 & -h & h \end{vmatrix}}{h^2-4} = -1 \\ z = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ h+1 & 1 & -1 \\ 2 & h+1 & -h \end{vmatrix}}{h^2-4} = \dfrac{1}{h-2}. \end{cases}$$

Dunque, per $h \neq 2, -2$ il sistema ammette la sola soluzione $\left\{ \left(-\dfrac{1}{h-2}, -1, \dfrac{1}{h-2} \right) \right\}$.

Sia $h = 2$. In tal caso, la matrice completa è:

$$A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & 2 & -2 \end{array} \right) \overset{\text{riducendo}}{\longmapsto} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Dunque, per $h = 2$ il sistema è impossibile.

Sia $h = -2$. In tal caso, la matrice completa è:

$$A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 & 2 \end{array} \right) \overset{\text{riducendo}}{\longmapsto} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 1 \end{array} \right).$$

Dunque, il sistema diventa:

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ x - 3z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3z + 1 \\ y = 4z. \end{cases}$$

Dunque, le soluzioni del sistema sono $\{(3z+1, 4z, z) \in \mathbb{R}^3\}$.