CdL in Ingegneria Informatica (A-D e O-Z) - Ingegneria Elettronica (A-D e O-Z) -Ingegneria REA

Prova scritta di **Algebra lineare e Geometria**- 2 Febbraio 2016

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.

I

È data la base $\mathscr{A} = [v_1, v_2, v_3]$ di $\mathbb{R}^3$, con $v_1 = (1,0,0)$, $v_2 = (0,1,1)$ e $v_3 = (1,1,0)$, ed è assegnato l'endomorfismo $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da:

$$\begin{aligned} f(v_1) &= -v_2 + kv_3 \\ f(v_2) &= v_1 + 2v_2 \\ f(v_3) &= v_1 + v_2 + (2-k)v_3, \end{aligned}$$

al variare di $k \in \mathbb{R}$.

1. Studiare f, al variare di $k \in \mathbb{R}$, determinando $\operatorname{Ker} f$ e $\operatorname{Im} f$.
2. Studiare la semplicità di f al variare di $k \in \mathbb{R}$.
3. Dato $V = \mathscr{L}((v_1 + 2v_2 + v_3, v_2 + 2v_3))$, calcolare $f(V)$ al variare di $k \in \mathbb{R}$, determinandone in particolare la dimensione. Dato $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y - z = 0\}$, stabilire se esiste un valore di $k \in \mathbb{R}$ per il quale $f(V) = W$.
4. Calcolare $f^{-1}(v_1 + v_2 + v_3)$, al variare di $k \in \mathbb{R}$.

Soluzione

1. Dal momento che:

$$M^{\mathscr{A}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ k & 0 & 2-k \end{pmatrix},$$

si ha $|M^{\mathscr{A}}(f)| = 2 - 2k$. Dunque, per $k \neq 1$ f è un isomorfismo e $\operatorname{Ker} f = \{(0,0,0)\}$ e $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^3$, cioè f è sia iniettiva che suriettiva.

Sia $k = 1$. In tal caso:

$$M^{\mathscr{A}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xmapsto{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque, $\dim \operatorname{Im} f = \rho(M^{\mathscr{A}}(f)) = 2$ e una base di $\operatorname{Im} f$ è:

$$[-v_2 + v_3, v_1 + 2v_2] = [(1,0,-1),(1,2,2)].$$

Inoltre, $\dim \operatorname{Ker} f = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \operatorname{Im} f = 1$ e:

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker} f &= \{v \in \mathbb{R}^3 \mid [v]_{\mathscr{A}} = (a,b,c),\ b + c = 0,\ -a - c = 0\} = \\ &= \{v \in \mathbb{R}^3 \mid [v]_{\mathscr{A}} = (-c,-c,c)\} = \mathscr{L}(v_1 + v_2 - v_3) = \mathscr{L}((0,0,1)). \end{aligned}$$

2. Si vede che:
$$P(T) = \begin{vmatrix} -T & 1 & 1 \\ -1 & 2-T & 1 \\ k & 0 & 2-k-T \end{vmatrix} = (2-T)(1-T)(1-k-T),$$
per cui gli autovalori sono $1, 2, 1-k$. Per $k \neq 0, -1$ essi sono tutti distinti di molteplicità algebrica pari a 1, da cui segue che f è semplice in tali casi.

Sia $k = 0$. In tal caso, gli autovalori sono 1 e 2, con $m_1 = 2$ e $m_2 = 1$. Essendo $1 \leq \dim V_2 \leq 1 = m_2$, si ha che $\dim V_2 = m_2 = 1$. Dunque, f sarà semplice se $\dim V_1 = m_1 = 2$, laddove sappiamo che certamente $1 \leq \dim V_1 \leq 2 = m_1$. Sappiamo che $V_1 = \operatorname{Ker} f_1$, dove $f_1 = f - i$ e:
$$M^{\mathscr{A}}(f_1) = M^{\mathscr{A}}(f) - I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{\text{riducendo}}{\longmapsto} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Dunque, $\rho(M^{\mathscr{A}}(f_1)) = 2$ e, quindi, $\dim V_1 = 3 - \rho(M^{\mathscr{A}}(f_1)) = 1 < 2 = m_1$. Dunque, per $k = 0$ f non è semplice.

Sia $k = -1$. In tal caso, gli autovalori sono 1 e 2, con $m_1 = 1$ e $m_2 = 2$. Essendo $1 \leq \dim V_1 \leq 1 = m_1$, si ha che $\dim V_1 = m_1 = 1$. Dunque, f sarà semplice se $\dim V_2 = m_2 = 2$, laddove sappiamo che certamente $1 \leq \dim V_2 \leq 2 = m_2$. Sappiamo che $V_2 = \operatorname{Ker} f_2$, dove $f_2 = f - 2i$ e:
$$M^{\mathscr{A}}(f_2) = M^{\mathscr{A}}(f) - 2I = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{\text{riducendo}}{\longmapsto} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
Dunque, $\rho(M^{\mathscr{A}}(f_2)) = 2$ e, quindi, $\dim V_2 = 3 - \rho(M^{\mathscr{A}}(f_2)) = 1 < 2 = m_2$. Dunque, per $k = -1$ f non è semplice.

3. Da:
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ k & 0 & 2-k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$
otteniamo che $f(v_1 + 2v_2 + v_3) = 3v_1 + 4v_2 + 2v_3$. Analogamente, da:
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ k & 0 & 2-k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 4-2k \end{pmatrix}$$
otteniamo che $f(v_2 + 2v_3) = 3v_1 + 4v_2 + (4-2k)v_3$. Dunque:
$$f(V) = \mathscr{L}(3v_1 + 4v_2 + 2v_3, 3v_1 + 4v_2 + (4-2k)v_3).$$
Per determinare la sua dimensione è sufficiente determinare il rango della matrice:
$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 4-2k \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2-2k \end{pmatrix}.$$
Dunque, per $k \neq 1$ si ha che $\dim f(V) = 2$ e:
$$f(V) = \mathscr{L}(3v_1 + 4v_2 + 2v_3, 3v_1 + 4v_2 + (4-2k)v_3) = \mathscr{L}((5,6,4), (7-2k, 8-2k, 4)).$$
Invece, per $k = 1$ si ha che $\dim f(V) = 1$ e:
$$f(V) = \mathscr{L}(3v_1 + 4v_2 + 2v_3) = \mathscr{L}((5,6,4)).$$
Osserviamo, ora, che $f(V) \subseteq W$ se e solo se $(5,6,4), (7-2k, 8-2k, 4) \in W$. $(5,6,4) \in W$, in quanto soddisfa la sua equazione cartesiana. Invece, $(7-2k, 8-2k, 4) \in W$ solo per $k = 1$. Quindi, $f(V) \subseteq W$ per $k = 1$, ma per tale valore non c'è l'uguaglianza, in quanto $\dim f(V) = 1$ e $\dim W = 2$.

4. Occorre risolvere il sistema:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & | & 1 \\ -1 & 2 & 1 & | & 1 \\ k & 0 & 2-k & | & 1 \end{pmatrix} \xmapsto{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & | & 1 \\ -1 & 0 & 1 & | & -1 \\ 0 & 0 & 2-2k & | & 1-k \end{pmatrix}.$$

Dunque, per $k \neq 1$ abbiamo una sola soluzione, mentre per $k = 1$ abbiamo ∞^1 soluzioni.

Sia $k \neq 1$. In questo caso:

$$\begin{cases} b+c=1 \\ -a-c=-1 \\ (2-2k)c = 1-k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = \frac{1}{2} \\ c = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Dunque:

$$f^{-1}(v_1+v_2+v_3) = \{\frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{2}v_2 + \frac{1}{2}v_3\} = \{(1,1,\frac{1}{2})\}.$$

Sia $k = 1$. In questo caso:

$$\begin{cases} b+c=1 \\ -a-c=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1-c \\ b = 1-c. \end{cases}$$

Dunque:

$$f^{-1}(v_1+v_2+v_3) = \{(1-c)v_1 + (1-c)v_2 + cv_3 \in \mathbb{R}^3\} = \{(1,1,1-c) \in \mathbb{R}^3\}.$$

II

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1. Sono dati il piano $\pi\colon x+y+z=0$ e le rette $r\colon x-1 = y+z = 0$ e $s\colon y = x-z = 0$. Mostrare che le rette sono sghembe, calcolare le distanze $d(r,\pi)$ e $d(s,\pi)$ di r e s da π e determinare la proiezione ortogonale di s su π.

2. Studiare il fascio di coniche del piano $z=0$ di equazione:

$$hx^2 - 2xy + y^2 - 2hx + 2y + 1 = 0,$$

determinandone, in particolare, i suoi punti base e le coniche spezzate.

3. Determinare il cilindro contenente la conica:

$$\Gamma\colon \begin{cases} x^2 - y^2 - 1 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

e i punti $A = (0,1,-1)$, $B = (2,1,-1)$ e $C = (0,-1,1)$.

Soluzione

1. Le rette sono sghembe in quanto:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

Osserviamo, poi, che i parametri direttori della retta r sono $(0,1,-1)$ e che le componenti di un vettore perpendicolare al piano π sono $(1,1,1)$. Dunque, retta e piano sono paralleli e, scelto un punto qualsiasi di r, per esempio $A = (1,0,0)$, possiamo dire che:

$$d(r,\pi) = d(A,\pi) = \frac{|1|}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Per quel che riguarda s, i suoi parametri direttori sono $(1,0,1)$, per cui s e π non sono parallele. Dunque, esse devono essere incidenti (e infatti $s \cap \pi = \{(0,0,0)\}$). Ciò significa che $d(s,\pi) = 0$. Cerchiamo, ora, il piano π' contenente s e perpendicolare a π. I piani contenenti s hanno equazione:

$$\lambda y + \mu(x - z) = 0 \Rightarrow \mu x + \lambda y - \mu z = 0.$$

Il piano cercato è tale che i vettori di componenti $(\mu, \lambda, -\mu)$ e $(1,1,1)$ sono perpendicolari tra loro, per cui deve essere $\lambda = 0$. Dunque, il piani cercato è $\pi'\colon x - z = 0$ e la proiezione ortogonale di s su π e la retta $\pi \cap \pi'$:

$$\begin{cases} x - z = 0 \\ x + y + z = 0. \end{cases}$$

2. Le matrici associate al fascio di coniche sono:

$$B = \begin{pmatrix} h & -1 & -h \\ -1 & 1 & 1 \\ -h & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{pmatrix} h & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dato che $|B| = -(h-1)^2$, una conica spezzata si ottiene per $h = 1$:

$$x^2 - 2xy + y^2 - 2x + 2y + 1 = 0 \Rightarrow (x - y - 1)^2 = 0.$$

Per $h = \infty$ abbiamo un'altra conica spezzata $x(x-2) = 0$. Dunque, i punti base sono dati da:

$$\begin{cases} (x - y - 1)^2 = 0 \\ x(x-2) = 0, \end{cases}$$

per cui sono $A = (0,-1)$ e $B = (2,1)$, entrambi contati due volte. Poi, essendo $|A| = h - 1$, vediamo che per $h > 1$ abbiamo delle ellissi, tra le quali non vi sono circonferenze, e che per $h < 1$ abbiamo delle iperboli, tra le quali troviamo quella equilatera per $h = -1$. Non ci sono parabole perché per $h = 1$ abbiamo una conica spezzata.

3. Le quadriche contenenti la conica data hanno equazione:

$$x^2 - y^2 - 1 + z(ax + by + cz + d) = 0.$$

Imponendo il passaggio per i punti dati, otteniamo il sistema:

$$\begin{cases} -b + c - d - 2 = 0 \\ -2a - b + c - d + 2 = 0 \\ -b + c + d - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ c = b + 2 \\ d = 0. \end{cases}$$

Dunque, le quadriche contenenti la conica e i punti dati hanno equazione:

$$x^2 - y^2 + 2xz + byz + (b+2)z^2 - 1 = 0.$$

La matrice associata alla C_∞ ha determinante:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & \frac{b}{2} \\ 1 & \frac{b}{2} & b+2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{4}(b+2)^2.$$

Dunque, il cilindro si ottiene per $b = -2$ ed esso ha equazione:

$$x^2 - y^2 + 2xz - 2yz - 1 = 0.$$