CdL in Ingegneria Informatica (E-N) - Ingegneria Elettronica (E-N)

Algebra Lineare e Geometria: Prova in itinere di **Geometria**- 18 Giugno 2016

Durata della prova: due ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti. Compito A

---

1. È assegnato nel piano un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, u$. Sono dati i punti $A = (1,0)$, $B = (0,1)$, $C = (-1,2)$ e $P_\infty = (1,1,0)$.

   (a) Mostrare che i punti A, B e C sono allineati e determinare l'equazione della retta r che li contiene.

   (b) Determinare l'equazione della retta $s = AP_\infty$ e della retta t passante per C e parallela a s. Calcolare $d(C,s)$ e $d(s,t)$.

   (c) Data la retta $p\colon 2x + y + 1 = 0$, determinare i punti P di p tali che le rette PB e PC siano ortogonali tra loro.

2. È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$. Sono dati le rette:
$$r\colon \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ x + z = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad s\colon \begin{cases} x + 2y + z - 1 = 0 \\ 2x - y + z + 1 = 0, \end{cases}$$
il piano $\pi\colon x + y + 2z = 0$ e il punto $P = (0,0,-1)$.

   (a) Determinare il piano α passante per P, ortogonale a π e parallelo a r.

   (b) Determinare il piano β contenente la retta s e passante per P e calcolare l'angolo formato da β e π.

   (c) Determinare la proiezione ortogonale di r su π.

3. È assegnato nel piano un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, u$. Studiare il fascio di coniche di equazione:
$$x^2 + 2xy + hy^2 + 2(h-1)x - h = 0,$$
determinando, in particolare, punti base e coniche spezzate. Mostrare che la retta $x + y - 1 = 0$ è tangente a tutte le coniche irriducibili del fascio e determinare il punto di tangenza.

Soluzione

1. (a) La retta AB ha equazione $x + y - 1 = 0$ ed è evidente che le coordinate del punto C verificano l'equazione di tale retta, per cui i tre punti sono allineati e l'equazione della retta r è $x + y - 1 = 0$.

   (b) Il punto P_∞ è il punto improprio della retta AP_∞, per cui $(1,1)$ sono le componenti di un vettore parallelo a tale retta, che dunque ha equazione $s\colon x - y - 1 = 0$. La retta t ha equazione del tipo $x - y + h = 0$. Dovendo passare per C, deve essere $h = 3$, per cui $t\colon x - y + 3 = 0$. Inoltre:
$$d(C,s) = d(s,t) = \frac{|-1-2-1|}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}.$$

   (c) Il generico punto della retta p è $P = (a, -2a-1)$, per cui la retta PB ha parametri direttori $(a, -2a-2)$ e la retta PC ha parametri direttori $(a+1, -2a-3)$. Affinché le rette PB e PC siano ortogonali tra loro deve essere:
$$a(a+1) + (-2a-2)(-2a-3) = 0 \Leftrightarrow a = -1 \text{ oppure } a = -\frac{6}{5}.$$
   Dunque, i punti cercati sono $P_1 = (-1,1)$ e $P_2 = (-\frac{6}{5}, \frac{7}{5})$.

2. (a) La retta r ha parametri direttori $(1,-1,-1)$. Siano (a,b,c) componenti di un vettore perpendicolare al piano α cercato. Dunque, deve essere:

$$\begin{cases} a-b-c=0 \\ a+b+2c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-\dfrac{1}{2}c \\ b=-\dfrac{3}{2}c. \end{cases}$$

Dunque, $(1,3,-2)$ sono componenti di un vettore perpendicolare ad α che ha equazione:

$$\alpha\colon x+3y-2(z+1)=0 \Rightarrow \alpha\colon x+3y-2z-2=0.$$

(b) I piani contenenti la retta s hanno equazione:

$$\lambda(x+2y+z-1)+\mu(2x-y+z+1)=0.$$

Imponendo il passaggio per P troviamo:

$$\lambda(-2)+\mu(-1+1)=0 \Rightarrow \lambda=0.$$

Dunque, $\beta\colon 2x-y+z+1=0$. L'angolo individuato dai piani β e π è quello individuato da vettori ad essi perpendicolari, quali sono, ad esempio, quelli di componenti $(2,-1,1)$ e $(1,1,2)$. Perciò:

$$\cos\widehat{\beta\pi}=\frac{2-1+2}{\sqrt{4+1+1}\sqrt{1+1+4}}=\frac{1}{2}.$$

Dunque, $\widehat{\beta\pi}=\frac{\pi}{3}$.

(c) I piani contenenti la retta r hanno equazione:

$$\lambda(x+y-1)+\mu(x+z)=0 \Rightarrow (\lambda+\mu)x+\lambda y+\mu z-\lambda=0.$$

Vogliamo che i vettori di componenti $(\lambda+\mu,\lambda,\mu)$ e $(1,1,2)$ siano perpendicolari tra loro, cioè:

$$\lambda+\mu+\lambda+2\mu=0 \Rightarrow 2\lambda+3\mu=0.$$

Prendendo $\lambda=3$ e $\mu=-2$ otteniamo il piano:

$$\pi'\colon 3(x+y-1)-2(x+z)=0 \Rightarrow \pi'\colon x+3y-2z-3=0.$$

Dunque, la retta cercata è:

$$\pi\cap\pi'\colon \begin{cases} x+3y-2z-3=0 \\ x+y+2z=0. \end{cases}$$

3. L'equazione del fascio di coniche si può scrivere nella forma:

$$x^2+2xy-2x+h(y^2+2x-1)=0,$$

per cui la conica nascosta del fascio ha equazione $y^2+2x-1=0$, che è una parabola. La matrice associata al fascio di coniche è:

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & h-1 \\ 1 & h & 0 \\ h-1 & 0 & -h \end{pmatrix},$$

da cui $|B|=-h^2(h-1)$. Ciò vuol dire che le coniche spezzate del fascio si hanno solo per $h=0$ e $h=1$ e le loro equazioni sono rispettivamente:

$$x^2+2xy-2x=0 \Rightarrow x(x+2y-2)=0$$

e

$$x^2+2xy+y^2-1=0 \Rightarrow (x+y+1)(x+y-1)=0.$$

Intersecandole troviamo i punti base del fascio:

$$\begin{cases} x(x+2y-2)=0 \\ (x+y+1)(x+y-1)=0, \end{cases}$$

cioè troviamo i punti $(0,-1)$, $(-4,3)$ e il punto $(0,1)$ contato due volte. Inoltre, $|A| = h-1$, per cui per $h > 1$ abbiamo delle ellissi, tutte reali, nessuna delle quali è una circonferenza. Per $h = 1$ non abbiamo una parabola, ma una conica spezzata, il che vuol dire che l'unica parabola del fascio è quella nascosta. Per $h < 1$, $h \neq 0$, abbiamo delle iperboli, tra le quali abbiamo un'iperbole equilatera per $h = -1$.

Per vedere se la retta $x+y-1=0$ è tangente alle coniche occorre risolvere il sistema:

$$\begin{cases} x+y-1=0 \\ x^2+2xy+hy^2+2(h-1)x-h=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=1-x \\ (h-1)x^2=0. \end{cases}$$

Dunque, per $h \neq 0,1$, le coniche sono tutte irriducibili e sono tangenti alla retta $x+y-1=0$ nel punto $(0,1)$. Osserviamo che lo stesso accade quando consideriamo la parabola del fascio:

$$\begin{cases} y=1-x \\ y^2+2x-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=1-x \\ x^2=0, \end{cases}$$

cioè abbiamo che la retta è tangente alla parabola nel punto $(0,1)$.