CdL in Ingegneria Industriale (A-E e F-O) - Ingegneria Informatica (A-D e O-Z) - Ingegneria Elettronica (A-D e O-Z) - Ingegneria REA

Prova scritta di **Algebra lineare e Geometria**- 15 Aprile 2016

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.

I

Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita dalle seguenti condizioni:

(a) $\operatorname{Ker} f = \mathscr{L}((1,1,1))$

(b) $(1,1,0)$ sia autovettore associato all'autovalore 1

(c) $f(0,1,0) = (h, h+1, h)$,

al variare di $h \in \mathbb{R}$.

1. Studiare f, al variare di $h \in \mathbb{R}$, determinando in ciascun caso $\operatorname{Ker} f$ e $\operatorname{Im} f$.
2. Studiare la semplicità di f al variare di $h \in \mathbb{R}$.
3. Detta $i\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare definita da $i(x,y,z) = (0,x,y,z)$, determinare la matrice associata rispetto alle basi canoniche all'applicazione lineare $f' = i \circ f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$.
4. Determinare la controimmagine del sottospazio $W = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y+z+t = 0\}$ rispetto a f'.
5. Diagonalizzare la matrice:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soluzione

1. Le condizioni date ci dicono che:
$$\begin{aligned} f(1,1,1) &= (0,0,0) \\ f(1,1,0) &= (1,1,0) \\ f(0,1,0) &= (h,h+1,h). \end{aligned}$$
Da queste è possibile ricavare facilmente la matrice associata a f rispetto alla base canonica:
$$M(f) = \begin{pmatrix} 1-h & h & -1 \\ -h & h+1 & -1 \\ -h & h & 0 \end{pmatrix} \xmapsto{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 1-h & h & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
Dunque, si ottiene che $\rho(M(f)) = 2$ per ogni $h \in \mathbb{R}$ e, quindi, che $\dim \operatorname{Im} f = 2$ per ogni $h \in \mathbb{R}$. Una sua base è data da $[(1-h,-h,-h),(-1,-1,0)]$. Per quel che riguarda il $\operatorname{Ker} f$, dall'assegnazione sappiamo già che $\operatorname{Ker} f = \mathscr{L}((1,1,1))$.

2. Si vede che:
$$P(T) = \begin{vmatrix} 1-h-T & h & -1 \\ -h & h+1-T & -1 \\ -h & h & -T \end{vmatrix} = -T(T-1)^2.$$
Dunque, gli autovalori sono 0, con $m_0 = 1$, e 1, con $m_1 = 2$. f sarà semplice se $\dim V_1 = m_1 = 2$, essendo già automaticamente vero che $\dim V_0 = m_0 = 1$. Sappiamo che $V_1 = \operatorname{Ker} f_1$, con $f_1 = f - i$ e:
$$M(f_1) = M(f) - I = \begin{pmatrix} -h & h & -1 \\ -h & h & -1 \\ -h & h & -1 \end{pmatrix} \overset{\text{riducendo}}{\longmapsto} \begin{pmatrix} -h & h & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
Dal momento che $\rho(M(f_1)) = 1$ per ogni h, concludiamo che $\dim V_1 = 3 - 1 = 2 = m_1$, per cui f è semplice per ogni valore di h.

3. Sappiamo che:
$$M(f') = M(i) \cdot M(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1-h & h & -1 \\ -h & h+1 & -1 \\ -h & h & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1-h & h & -1 \\ -h & h+1 & -1 \\ -h & h & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Da:
$$M(f') \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1-h & h & -1 \\ -h & h+1 & -1 \\ -h & h & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ (1-h)x + hy - z \\ -hx + (h+1)y - z \\ -hx + hy \end{pmatrix},$$
otteniamo che:
$$f'(x,y,z) = (0, (1-h)x + hy - z, -hx + (h+1)y - z, -hx + hy).$$
Dunque:
$$\begin{aligned} f'^{-1}(W) &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid f'(x,y,z) \in W\} = \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (1-h)x + hy - z - hx + (h+1)y - z - hx + hy = 0\} = \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (1-3h)x + (3h+1)y - 2z = 0\}. \end{aligned}$$

5. Si vede che:
$$P_A(T) = \begin{vmatrix} 1-T & 1 & 0 \\ 1 & 2-T & 1 \\ 0 & 1 & 1-T \end{vmatrix} = -T(1-T)(3-T).$$
Dunque, gli autovalori sono $0, 1, 3$, tutti di molteplicità algebrica 1, per cui A è diagonalizzabile.
Calcoliamo V_0:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{\text{riducendo}}{\longmapsto} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
da cui:
$$V_0 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 0,\ y + z = 0\} = \mathscr{L}((1,-1,1)).$$
Calcoliamo V_1:
$$A - I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{\text{riducendo}}{\longmapsto} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
da cui:
$$V_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 0,\ x + z = 0\} = \mathscr{L}((1,0,-1)).$$

Calcoliamo V_3:

$$A - 3I = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \overset{\text{riducendo}}{\longmapsto} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

da cui:

$$V_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid -2x + y = 0,\ -x + z = 0\} = \mathscr{L}((1, 2, 1)).$$

Dunque, una matrice che diagonalizza A è:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

e una matrice diagonale a cui A è simile è:

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

e sarà $P^{-1}AP = D$.

II

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1. Sono dati i punti $A = (1, 1, 0)$, $B = (0, 2, -1)$ e $C = (1, 1, 1)$. Determinare:
   (a) la retta r passante per A e B,
   (b) il piano π contenente la retta r e passante per C,
   (c) la retta s contenuta in π, perpendicolare a r e passante per A.

2. Determinare e studiare il fascio di coniche del piano $z = 0$ tali che le rette:

$$r\colon \begin{cases} z = 0 \\ x - 3y - 1 = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad s\colon \begin{cases} z = 0 \\ 3x - y + 1 = 0 \end{cases}$$

   siano tangenti nei punti in cui esse intersecano la retta:

$$t\colon \begin{cases} z = 0 \\ x + y - 1 = 0. \end{cases}$$

   Determinare, in particolare, la circonferenza, l'iperbole equilatera e la parabola del fascio.

3. Determinare e studiare la quadrica Q luogo delle rette che passano per O e che formano con la retta:

$$u\colon \begin{cases} 2x - y + z - 1 = 0 \\ 3x + y + 4z - 2 = 0, \end{cases}$$

   un angolo di $\frac{\pi}{3}$.

Soluzione

1. È molto semplice vedere che.

$$r\colon \begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ x - z - 1 = 0. \end{cases}$$

   Il fascio di piani contenente r ha equazione:

$$\lambda(x + y - 2) + \mu(x - z - 1) = 0.$$

Imponendo il passaggio per C troviamo $-\mu = 0$, cioè abbiamo il piano $\pi\colon x + y - 2 = 0$. Per determinare s occorre determinare il piano π' perpendicolare a r e passante per A. La retta r ha parametri direttori $(1, -1, 1)$, per cui:

$$\pi'\colon x - 1 - (y - 1) + z = 0 \Rightarrow x - y + z = 0.$$

Dunque:

$$s = \pi \cap \pi'\colon \begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ x - y + z = 0. \end{cases}$$

2. Il fascio di coniche ha equazione:

$$(x - 3y - 1)(3x - y + 1) + h(x + y - 1)^2 = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (h + 3)x^2 + (h + 3)y^2 + (2h - 10)xy + (-2h - 2)x + (-2h - 2)y - 1 = 0.$$

Le uniche coniche spezzate del fascio sono le due utilizzate per scriverne l'equazione, per cui possiamo affermare che $|B| = 0$ se e solo se $h = 0$. Inoltre, essendo:

$$|A| = \begin{vmatrix} h+3 & h-5 \\ h-5 & h+3 \end{vmatrix} = 16h - 16,$$

concludiamo che per $h > 1$ abbiamo delle ellissi reali e, in particolare, per $h = 5$ abbiamo la circonferenza del fascio di equazione:

$$8x^2 + 8y^2 - 12x - 12y - 1 = 0.$$

Per $h = 1$ abbiamo la parabola del fascio ed essa ha equazione:

$$4x^2 + 4y^2 - 8xy - 4x - 4y - 1 = 0.$$

Per $h < 1$, $h \neq 0$, abbiamo le iperboli del fascio. In particolare, per $h = -3$ abbiamo l'iperbole equilatera di equazione:

$$-16xy + 4x + 4y - 1 = 0.$$

3. Parametri direttori della retta u sono $(1, 1, -1)$. Le rette passanti per O hanno equazioni:

$$\begin{cases} x = lt \\ y = mt \\ z = nt. \end{cases}$$

Tali rette formano con u un angolo di $\frac{\pi}{3}$ se:

$$\frac{l + m - n}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2} \cdot \sqrt{3}} = \pm\frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow 2(l + m - n) = \pm\sqrt{3(l^2 + m^2 + n^2)}.$$

Elevando al quadrato troviamo:

$$l^2 + m^2 + n^2 - 4lm + 4ln + 4mn = 0.$$

Dalle equazioni delle rette passanti per O otteniamo $l = \frac{x}{t}$, $m = \frac{y}{t}$ e $n = \frac{z}{t}$. Sostituendo otteniamo:

$$\frac{x^2}{t^2} + \frac{y^2}{t^2} + \frac{z^2}{t^2} - 4\frac{xy}{t^2} + 4\frac{xz}{t^2} + 4\frac{yz}{t^2} = 0.$$

Dunque, l'equazione della quadrica è:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4xy + 4xz + 4yz = 0.$$

Le matrici associate alla quadrica sono:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Essendo $|B| = 0$ e $|A| = -27 \neq 0$, concludiamo subito che la quadrica cercata è un cono.