CdL in Ingegneria Industriale (A-E e F-O)

Prova scritta di **Algebra lineare e Geometria**- 13 Settembre 2016

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.

I

In $\mathbb{R}^4$ sono assegnati i vettori $v_1 = (1,2,2,1)$, $v_2 = (1,0,0,-1)$, $v_3 = (0,0,0,1)$, $w_1 = (1,-1,0,1)$ e $w_2 = (1,3,2,1)$ ed i sottospazi $V = \mathscr{L}(v_1, v_2, v_3)$ e $W = \mathscr{L}(w_1, w_2)$.

1. Determinare l'intersezione e la somma di V e W, specificando se quest'ultima sia diretta o meno.
2. Detta $f\colon V \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare definita da:
$$\begin{aligned} f(v_1) &= (-2, h-1, -2, 0) \\ f(v_2) &= (-2, -2, h-1, 0) \\ f(v_3) &= (1,1,1,h), \end{aligned}$$
determinare i valori del parametro reale h per il quale f risulti iniettiva.
3. Detta $g\colon W \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare definita da:
$$\begin{aligned} g(w_1) &= (-k, k+2, 1, -1) \\ g(w_2) &= (-1, -5, -3, -k), \end{aligned}$$
verificare che g è iniettiva per ogni valore del parametro reale k.
4. Determinare il valore di h per cui f induce un endomorfismo $f'\colon V \to V$ ed il valore di k per cui g induce un endomorfismo $g'\colon W \to W$.
5. Verificare che f' e g' sono semplici.

Soluzione

1. È immediato notare che la matrice:
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
è ridotta di rango 3, per cui $\dim V = 3$. Inoltre, da:
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ x & y & z & t \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2z - 2y = 0,$$
vediamo che:
$$V = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid y - z = 0\}.$$
Da:
$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ x & y & z & t \end{pmatrix} \xmapsto{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & -2 & 0 \\ 0 & x+y-2z & 0 & t-x \end{pmatrix},$$

vediamo che $\dim W = 2$ e che:

$$W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y - 2z = 0,\ x - t = 0\}.$$

Dunque:

$$V \cap W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y - 2z = 0,\ x - t = 0,\ y - z = 0\} = \mathscr{L}((1, 1, 1, 1)).$$

Quindi, la somma $V + W$ non è diretta e vediamo che:

$$\dim(V + W) = \dim V + \dim W - \dim(V \cap W) = 4.$$

Essendo $V + W \subseteq \mathbb{R}^4$, questo vuol dire che deve essere $V + W = \mathbb{R}^4$.

2. Posta $\mathscr{A} = [v_1, v_2, v_3]$ base di V, si vede immediatamente che:

$$M^{\mathscr{A},\mathcal{E}}(f) = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ h-1 & -2 & 1 \\ -2 & h-1 & 1 \\ 0 & 0 & h \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo questo minore:
$$\begin{vmatrix} -2 & -2 & 1 \\ h-1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & h \end{vmatrix} = 2h(h+1).$$

Esso è non nullo per $h \neq 0, -1$, il che implica che per $h \neq 0, -1$ $\dim \operatorname{Im} f = \rho(M^{\mathscr{A},\mathcal{E}}(f)) = 3$. Essendo $\dim V = 3$, questo significa che per $h \neq 0, -1$ $\dim \operatorname{Ker} f = 0$, per cui $\operatorname{Ker} f = \{(0, 0, 0, 0)\}$ ed f è iniettiva.

Sia $h = 0$. In tal caso:

$$M^{\mathscr{A},\mathcal{E}}(f) = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{\text{riducendo}}{\longmapsto} \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque, $\dim \operatorname{Im} f = \rho(M^{\mathscr{A},\mathcal{E}}(f)) = 3$. Ragionando come prima otteniamo subito che per $h = 0$ f è iniettiva.

Sia $h = -1$. In tal caso:

$$M^{\mathscr{A},\mathcal{E}}(f) = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \overset{\text{riducendo}}{\longmapsto} \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Dunque, $\dim \operatorname{Im} f = \rho(M^{\mathscr{A},\mathcal{E}}(f)) = 2$. In tal caso, $\dim \operatorname{Ker} f = 1$, per cui f non è certamente iniettiva. Riepilogando, f è iniettiva per $h \neq -1$.

3. Posta $B = [w_1, w_2]$ base di W, si vede immediatamente che:

$$M^{\mathscr{B},\mathcal{E}}(g) = \begin{pmatrix} -k & -1 \\ k+2 & -5 \\ 1 & -3 \\ -1 & -k \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo il seguente minore:
$$\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -1 & -k \end{vmatrix} = -k - 3.$$

Quindi, per $k \neq -3$ certamente si ha $\dim \operatorname{Im} g = \rho(M^{\mathscr{B},\mathcal{E}}(g)) = 2$. Essendo $\dim W = 2$, questo implica che $\dim \operatorname{Ker} g = 0$. Quindi, $\operatorname{Ker} g = \{(0,0,0,0)\}$ e g è iniettiva.

Sia $k = -3$. In tal caso:

$$M^{\mathscr{B},\mathcal{E}}(g) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & -5 \\ 1 & -3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo il seguente minore:

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & -5 \end{vmatrix} = -16 \neq 0.$$

Dunque, anche in tal caso si ha $\dim \operatorname{Im} g = \rho(M^{\mathscr{B},\mathcal{E}}(g)) = 2$. Ragionando come prima si ottiene subito che g è iniettiva anche per $k = -3$. Quindi, g è iniettiva per ogni valore di k.

4. f induce un endomorfismo di V se e solo se $f(V) \subseteq V$. Sappiamo che:

$$f(V) = \mathscr{L}(f(v_1), f(v_2), f(v_3)) = \mathscr{L}((-2, h-1, -2, 0), (-2, -2, h-1, 0), (1, 1, 1, h)).$$

$f(V) \subseteq V$ se e solo se $(-2, h-1, -2, 0), (-2, -2, h-1, 0), (1, 1, 1, h) \in V$. I tre vettori appartengono a V se e solo se verificano la sua equazione cartesiana $y - z = 0$. Vediamo che $(-2, h-1, -2, 0), (-2, -2, h-1, 0) \in V$ se e solo se $h = -1$, mentre $(1, 1, 1, h) \in V$ per ogni valore di h. Quindi, f induce un endomorfismo di V per $h = -1$.

g induce un endomorfismo di W se e solo se $g(W) \subseteq W$. Sappiamo che:

$$g(W) = \mathscr{L}(g(w_1), g(w_2)) = \mathscr{L}((-k, k+2, 1, -1), (-1, -5, -3, -k)).$$

$g(W) \subseteq W$ se e solo se $(-k, k+2, 1, -1), (-1, -5, -3, -k) \in W$. I due vettori appartengono a W se e solo se verificano entrambe le sue equazioni cartesiane $x + y - 2z = 0$ e $x - t = 0$. Vediamo che $(-k, k+2, 1, -1), (-1, -5, -3, -k) \in W$ se e solo se $k = 1$, per cui g induce un endomorfismo di W per $k = 1$.

5. Sia $h = -1$. Sappiamo che:

$$\begin{aligned} f'(v_1) &= f(v_1) = (-2, -2, -2, 0) \\ f'(v_2) &= f(v_2) = (-2, -2, -2, 0) \\ f'(v_3) &= f(v_3) = (1, 1, 1, -1). \end{aligned}$$

È semplice vedere che $[(-2, -2, -2, 0)]_{\mathscr{A}} = (-1, -1, 0)$ e che $[(1, 1, 1, -1)]_{\mathscr{A}} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1)$. Dunque:

$$M^{\mathscr{A}}(f') = \begin{pmatrix} -1 & -1 & \dfrac{1}{2} \\ -1 & -1 & \dfrac{1}{2} \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

per cui:

$$P(T) = \begin{vmatrix} -1-T & -1 & \dfrac{1}{2} \\ -1 & -1-T & \dfrac{1}{2} \\ 0 & 0 & -1-T \end{vmatrix} = (-1-T)(T^2 - 2T).$$

Dunque, gli autovalori sono $0, -1, 2$, cioè sono tre distinti tutti di molteplicità algebrica 1, e concludiamo subito che f' è semplice.

Sia $k = 1$. Sappiamo che:

$$g'(w_1) = g(w_1) = (-1, 3, 1, -1)$$
$$g'(w_2) = g(w_2) = (-1, -5, -3, -1).$$

È semplice vedere che $[(-1,3,1,-1)]_{\mathscr{B}} = (-\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$ e che $[(-1,-5,-3,-1)]_{\mathscr{B}} = (\frac{1}{2}, -\frac{3}{2})$. Dunque:

$$M^{\mathscr{B}}(g') = \begin{pmatrix} -\dfrac{3}{2} & \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & -\dfrac{3}{2} \end{pmatrix},$$

per cui:

$$P(T) = \begin{vmatrix} -\dfrac{3}{2} - T & \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & -\dfrac{3}{2} - T \end{vmatrix} = T^2 + 3T + 2.$$

Dunque, gli autovalori sono -1 e -2, cioè sono due distinti di molteplicità algebrica 1, e concludiamo subito che g' è semplice.

II

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1. Sono assegnati il piano $\pi\colon 2x + z + 2 = 0$ e la retta di equazioni:

$$r\colon \begin{cases} 2x + z - 1 = 0 \\ y - 1 = 0. \end{cases}$$

   Dato il punto $Q = (1, 1, 0)$, determinare la retta s passante per Q e perpendicolare a π e calcolare l'angolo individuato dalle rette r e s. Determinare il luogo delle rette passanti per Q che formano un angolo di $\frac{\pi}{4}$ con la retta s.

2. Sul piano $z = 0$ studiare il fascio di coniche di equazione:

$$x^2 + ky^2 + 2xy - ky = 0,$$

   determinandone, in particolare, punti base e coniche spezzate. Determinare vertice e asse di simmetria della parabola del fascio.

3. Determinare e studiare le quadriche contenenti la conica:

$$\Gamma\colon \begin{cases} x = 0 \\ y^2 + z^2 + 2yz - 3z = 0, \end{cases}$$

   e passanti per i punti $A = (1, 0, 0)$, $B = (-2, 0, 0)$ e $C = (1, -1, 0)$.

Soluzione

1. È semplice vedere che:

$$s\colon \begin{cases} x - 2z - 1 = 0 \\ y - 1 = 0. \end{cases}$$

   Si vede che $(1, 0, -2)$ e $(2, 0, 1)$ sono parametri direttori, rispettivamente, di r e s. Dunque:

$$\cos \widehat{rs} = \frac{2 - 2}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = 0,$$

per cui r e s sono perpendicolari tra loro e formano un angolo di $\frac{\pi}{2}$. Le rette passanti per Q hanno equazioni:

$$\begin{cases} x = 1 + lt \\ y = 1 + mt \\ z = nt. \end{cases}$$

Queste rette formano un angolo di $\frac{\pi}{4}$ con s se:

$$\frac{2l + n}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2} \cdot \sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow 3l^2 - 5m^2 - 3n^2 + 8ln = 0.$$

Ricavando l, m e n dalle equazioni delle rette per Q e andando a sostituire troviamo:

$$3(x-1)^2 - 5(y-1)^2 - 3z^2 + 8(x-1)z = 0.$$

Questa è l'equazione del luogo cercato.

2. Osserviamo che la conica nascosta ha equazione $y^2 - y = 0$, la quale è chiaramente spezzata. Le matrici associate al fascio di coniche sono:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & k & -\frac{k}{2} \\ 0 & -\frac{k}{2} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & k \end{pmatrix}.$$

Dunque, $|B| = -\frac{k^2}{4}$, per cui l'altra conica spezzata, contata due volte nel computo delle coniche spezzate, si ottiene per $k = 0$ ed ha equazione $x^2 + 2xy = 0$. Troviamo i punti base:

$$\begin{cases} y^2 - y = 0 \\ x^2 + 2xy = 0, \end{cases}$$

da cui otteniamo $(0,0)$, contato due volte, $(0,1)$ e $(-2,1)$. Essendo $|A| = k - 1$, per $k > 1$ otteniamo delle ellissi, nessuna delle quali è una circonferenza, per $k = 1$ abbiamo una parabola e per $k < 1$, $k \neq 0$, abbiamo delle iperboli. In particolare, per $k = -1$ abbiamo un'iperbole equilatera.

La parabola del fascio ha equazione $x^2 + y^2 + 2xy - y = 0$. Il punto improprio della parabola è dato da:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2xy + yt = 0 \\ t = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x+y)^2 = 0 \\ t = 0, \end{cases}$$

per cui esso è $P_\infty = (1, -1, 0)$. Quindi, l'asse di simmetria della parabola ha coefficiente angolare -1 e le rette perpendicolare all'asse hanno, di conseguenza, coefficiente angolare 1. Quindi, tali rette hanno equazione del tipo $y = x + h$. Tra tutte queste rette una sola sarà tangente alla parabola e lo sarà nel vertice. Cerchiamo questa retta:

$$\begin{cases} y = x + h \\ x^2 + y^2 + 2xy - y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x + h \\ 4x^2 + (4h-1)x + h^2 - h = 0. \end{cases}$$

La retta è tangente se si ha che $\Delta = 8h + 1 = 0$, cioè la retta tangente si ha per $h = -\frac{1}{8}$. In questo caso, il sistema precedente diventa:

$$\begin{cases} y = x - \dfrac{1}{8} \\[2ex] 4x^2 - \dfrac{3}{2}x + \dfrac{9}{64} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3}{16} \\[2ex] y = \dfrac{1}{16}. \end{cases}$$

Quindi, il vertice è il punto $V = (\frac{3}{16}, \frac{1}{16})$. L'asse di simmetria è la retta passante per V con coefficiente angolare -1, per cui è la retta di equazione:

$$x + y - \frac{1}{4} = 0.$$

3. Le quadriche contenenti la conica hanno equazione:

$$y^2 + 2yz + z^2 - 3z + x(ax + by + cz + d) = 0.$$

Imponendo il passaggio per i tre punti, otteniamo il sistema:

$$\begin{cases} a + d = 0 \\ 4a - 2d = 0 \\ a - b + d + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \\ d = 0. \end{cases}$$

Quindi, le quadriche cercate hanno equazione:

$$xy + cxz + y^2 + 2yz + z^2 - 3z = 0.$$

Le matrici associate sono:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{c}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 & 0 \\ \frac{c}{2} & 1 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{c}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ \frac{c}{2} & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dunque, $|B| = \frac{9}{16}$ e $|A| = -\frac{1}{4}(c-1)^2$. Quindi, per $c = 1$ abbiamo un paraboloide iperbolico, mentre per $c \neq 1$ abbiamo necessariamente degli iperboloidi iperbolici, e non degli ellissoidi immaginari, poiché le quadriche per costruzione contengono punti reali.