CdL in Ingegneria Informatica (A-D e O-Z) - Ingegneria Elettronica (A-D e O-Z) e Ingegneria REA

Prova scritta di **Algebra lineare e Geometria**- 13 Luglio 2016

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.

Compito A

I

È assegnato l'endomorfismo $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito dalle assegnazioni:

$$\begin{aligned} f(1,0,1) &= (h, h-3, h-4) \\ f(1,1,0) &= (h, h+2, h+3) \\ f(1,-1,0) &= (h, h-4, h-5), \end{aligned}$$

al variare di $h \in \mathbb{R}$.

1. Determinare la matrice associata a f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ e studiare f, al variare di $h \in \mathbb{R}$, determinando $\operatorname{Ker} f$ e $\operatorname{Im} f$ e le loro equazioni cartesiane.
2. Studiare la semplicità di f al variare di $h \in \mathbb{R}$, determinando una base di autovettori indipendente dal parametro.
3. Dati $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y-z=0\}$ e $W = \mathscr{L}((1,2,1),(0,1,1))$, calcolare:
$$f^{-1}(V) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z) \in V\},$$
al variare di $h \in \mathbb{R}$ e determinare il valore di h per il quale $f^{-1}(V) = W$.
4. Dato $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0\}$, mostrare che la restrizione $f|_U$ induce un endomorfismo $g\colon U \to U$ indipendente da h. Studiare la semplicità di g, determinandone, se possibile, una base di autovettori.

Soluzione

1. È facile vedere che:
$$M(f) = \begin{pmatrix} h & 0 & 0 \\ h-1 & 3 & -2 \\ h-1 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$
e che $|M(f)| = -h$. Dunque, per $h \neq 0$ f è un isomorfismo, cioè f è iniettiva e suriettiva, per cui $\operatorname{Ker} f = \{(0,0,0)\}$ e $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^3$.
Sia $h = 0$. In tal caso:
$$M(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ -1 & 4 & -3 \end{pmatrix} \xmapsto{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$
per cui $\dim \operatorname{Im} f = \rho(M(f)) = 2$ e una sua base è $[(0,-1,-1),(0,3,4)]$. Inoltre, da:
$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -x = 0,$$
ricaviamo che $\operatorname{Im} f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0\}$. Si vede anche che $\dim \operatorname{Ker} f = 3 - \dim \operatorname{Im} f = 1$ e che:
$$\operatorname{Ker} f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid -x+3y-2=0,\ y-z=0\} = \mathscr{L}((1,1,1)).$$

2. È facile vedere che:

$$P(T) = \begin{vmatrix} h-T & 0 & 0 \\ h-1 & 3-T & -2 \\ h-1 & 4 & -3-T \end{vmatrix} = (h-T)(T^2-1),$$

per cui gli autovalori sono $h, 1, -1$ e possiamo dire che f è certamente semplice per $h \neq 1, -1$, in quanto in tal caso tutti gli autovalori sono di molteplicità algebrica 1. Cerchiamo in tal caso una base di autovettori. Dunque, sia $h \neq 1, -1$.

Sia $T = h$. Sappiamo che $V_h = \operatorname{Ker} f_h$, dove $f_h = f - hi$ e:

$$M(f_h) = M(f) - hI = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ h-1 & 3-h & -2 \\ h-1 & 4 & -3-h \end{pmatrix} \overset{\text{riducendo}}{\longmapsto} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ h-1 & 3-h & -2 \\ 0 & h+1 & -h-1 \end{pmatrix}.$$

Dal momento che si ha $h \neq 1, -1$, abbiamo:

$$V_h = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (h-1)x + (3-h)y - 2z = 0,\ (h+1)y + (-h-1)z = 0\} = \mathscr{L}((1,1,1)).$$

Sia $T = 1$. Sappiamo che $V_1 = \operatorname{Ker} f_1$, dove $f_1 = f - i$ e:

$$M(f_1) = M(f) - I = \begin{pmatrix} h-1 & 0 & 0 \\ h-1 & 2 & -2 \\ h-1 & 4 & -4 \end{pmatrix} \overset{\text{riducendo}}{\longmapsto} \begin{pmatrix} h-1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dal momento che in particolare si ha $h \neq 1$, abbiamo:

$$V_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (h-1)x = 0,\ 2y - 2z = 0\} = \mathscr{L}((0,1,1)).$$

Sia $T = -1$. Sappiamo che $V_{-1} = \operatorname{Ker} f_{-1}$, dove $f_{-1} = f + i$ e:

$$M(f_{-1}) = M(f) + I = \begin{pmatrix} h+1 & 0 & 0 \\ h-1 & 4 & -2 \\ h-1 & 4 & -2 \end{pmatrix} \overset{\text{riducendo}}{\longmapsto} \begin{pmatrix} h+1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dal momento che in particolare si ha $h \neq -1$, abbiamo:

$$V_{-1} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (h+1)x = 0,\ 4y - 2z = 0\} = \mathscr{L}((0,1,2)).$$

Quindi, per $h \neq 1, -1$ una base di autovettori è $[(1,1,1), (0,1,1), (0,1,2)]$. Dal momento che questa base di autovettori non dipende dal parametro h, questa sarà una base di autovettori anche per $h = 1$ e $h = -1$, per cui possiamo concludere che f è semplice per ogni h e che la base di autovettori che cercavamo è $[(1,1,1), (0,1,1), (0,1,2)]$.

3. Da:

$$\begin{pmatrix} h & 0 & 0 \\ h-1 & 3 & -2 \\ h-1 & 4 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} hx \\ (h-1)x + 3y - 2z \\ (h-1)x + 4y - 3z \end{pmatrix},$$

vediamo che:

$$f(x,y,z) = (hx, (h-1)x + 3y - 2z, (h-1)x + 4y - 3z),$$

per cui:

$$\begin{aligned} f^{-1}(V) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid hx + (h-1)x + 3y - 2z - (h-1)x - 4y + 3z = 0\} = \\ = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid hx - y + z = 0\}. \end{aligned}$$

Inoltre, dal momento che la matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ha rango 2, concludiamo che $\dim W = 2$ e osserviamo che anche $\dim f^{-1}(V) = 2$ per ogni $h \in \mathbb{R}$. $W \subseteq f^{-1}(V)$ se $(1,2,1), (0,1,1) \in f^{-1}(V)$, cioè se:

$$\begin{cases} h - 2 + 1 = 0 \\ 0 - 1 + 1 = 0. \end{cases}$$

Dunque, $W \subseteq f^{-1}(V)$ se e solo se $h = 1$, ma, dal momento che $\dim W = \dim f^{-1}(V) = 2$, concludiamo che $W = f^{-1}(V)$ solo per $h = 1$.

4. Dal momento che $U = \mathscr{L}((0,1,0),(0,0,1))$, abbiamo:

$$f(U) = \mathscr{L}(f(0,1,0), f(0,0,1)) = \mathscr{L}((0,3,4),(0,-2,-3)).$$

Chiaramente, si ha che $(0,3,4),(0,-2,-3) \in U$, per cui abbiamo che $f(U) \subseteq U$ per ogni h e, quindi, che $f|_U$ induce un endomorfismo $g \colon U \to U$ per ogni h. Inoltre, essendo:

$$\begin{aligned} g(0,1,0) &= f(0,1,0) = (0,3,4) \\ g(0,0,1) &= f(0,0,1) = (0,-2,-3), \end{aligned}$$

notiamo che g è indipendente dal parametro h. Detta $\mathscr{A} = [(0,1,0),(0,0,1)]$ la base di U considerata, è molto semplice vedere che $[(0,3,4)]_{\mathscr{A}} = (3,4)$ e che $[(0,-2,-3)]_{\mathscr{A}} = (-2,-3)$. Dunque:

$$M^{\mathscr{A}}(g) = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$$

e

$$P(T) = \begin{vmatrix} 3-T & -2 \\ 4 & -3-T \end{vmatrix} = T^2 - 1.$$

Quindi, gli autovalori sono $T = 1, -1$. Sia $T = 1$. In tal caso, $V_1 = \operatorname{Ker} g_1$, dove $g_1 = g - i$ e:

$$M^{\mathscr{A}}(g_1) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & -4 \end{pmatrix},$$

per cui:

$$V_1 = \{v \in U \mid [v]_{\mathscr{A}} = (a,b),\ 2a - 2b = 0\} = \mathscr{L}((1,1)_{\mathscr{A}}) = \mathscr{L}((0,1,1)).$$

Sia $T = -1$. In tal caso, $V_{-1} = \operatorname{Ker} g_{-1}$, dove $g_{-1} = g + i$ e:

$$M^{\mathscr{A}}(g_{-1}) = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix},$$

per cui:

$$V_{-1} = \{v \in U \mid [v]_{\mathscr{A}} = (a,b),\ 4a - 2b = 0\} = \mathscr{L}((1,2)_{\mathscr{A}}) = \mathscr{L}((0,1,2)).$$

Quindi, la base di autovettori per g è $[(0,1,1),(0,1,2)]$. Questa poteva essere ottenuta anche semplicemente osservando che g è indotto da f, che autovettori di g sono anche autovettori per f e che i vettori $(0,1,1)$ e $(0,1,2)$ ottenuti nel punto 3 sono anche vettori di U. Dunque, necessariamente, essendo $\dim U = 2$, doveva essere $[(0,1,1),(0,1,2)]$ una base di autovettori di g.

II

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1. Sono dati i piani $\pi \colon 2x + y - z = 0$ e $\pi' \colon x - y + z + 2 = 0$ e il punto $P = (0,1,0)$. Determinare il punto P' simmetrico di P rispetto a π. Determinare la retta s passante per P e parallela π e π'.

2. Determinare e studiare il fascio di coniche del piano $z = 0$ tangenti alla retta $x + y - 1 = 0$ nel punto $A = (-1,2)$ e tangenti alla retta $x - 2y = 0$ nel punto $B = (4,2)$. Determinare gli asintoti dell'iperbole passante per il punto improprio $P_\infty = (3,1,0)$.

3. Studiare, al variare di $h \in \mathbb{R}$, le quadriche di equazione:

$$x^2 + y^2 + 2hyz + z^2 + 2x - 2hz + 1 = 0.$$

Soluzione

1. La retta r passante per P e perpendicolare a π ha equazioni:

$$r\colon \begin{cases} x + 2z = 0 \\ y + z - 1 = 0. \end{cases}$$

Il punto $H = \pi \cap r$ è:

$$H = \pi \cap r\colon \begin{cases} x + 2z = 0 \\ y + z - 1 = 0 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{1}{3} \\ y = \dfrac{5}{6} \\ z = \dfrac{1}{6} \end{cases} \Rightarrow H = \left(-\frac{1}{3}, \frac{5}{6}, \frac{1}{6}\right).$$

Il simmetrico di P rispetto a π è il punto $P' = (a, b, c)$ tale che H è il punto medio di P e di P':

$$\begin{cases} \dfrac{a}{2} = -\dfrac{1}{3} \\ \dfrac{b+1}{2} = \dfrac{5}{6} \\ \dfrac{c}{2} = \dfrac{1}{6}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{2}{3} \\ b = \dfrac{2}{3} \\ c = \dfrac{1}{3}. \end{cases}$$

Quindi, $P' = (-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})$.

La retta s è l'intersezione del piano α parallelo a π e passante per P con il piano β parallelo a π' e passante per P. I piani paralleli a π hanno equazione $2x + y - z + k = 0$ e, imponendo il passaggio per P, otteniamo $k = -1$, per cui $\alpha\colon 2x + y - z - 1 = 0$; i piani paralleli a π' hanno equazione $x - y + z + k = 0$ e, imponendo il passaggio per P, otteniamo $k = 1$, per cui $\beta\colon x - y + z + 1 = 0$. Quindi, abbiamo:

$$s\colon \begin{cases} 2x + y - z - 1 = 0 \\ x - y + z + 1 = 0. \end{cases}$$

2. Le due coniche spezzate del fascio sono $(x + y - 1)(x - 2y) = 0$ e $(y - 2)^2 = 0$, per cui il fascio di coniche ha equazione:

$$(x + y - 1)(x - 2y) + h(y - 2)^2 = 0 \Rightarrow x^2 - xy + (h - 2)y^2 - x + (2 - 4h)y + 4h = 0.$$

Dato che le due uniche coniche spezzate del fascio sono quelle usate per scriverne l'equazione, possiamo dire che $|B| = 0$ solo per $h = 0$. Inoltre, da:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & h - 2 \end{vmatrix} = h - \frac{9}{4},$$

concludiamo che per $h > \frac{9}{4}$ abbiamo delle ellissi reali, nessuna delle quali è una circonferenza, per $h = \frac{9}{4}$ abbiamo una parabola, mentre per $h < \frac{9}{4}$, con $h \neq 0$, abbiamo delle iperboli, tra le quali troviamo quella equilatera per $h = 1$.

Cerchiamo la conica del fascio passante per P_∞:

$$x^2 - xy + (h - 2)y^2 - xt + (2 - 4h)yt + 4ht^2 = 0 \Rightarrow h = -4.$$

Quindi, la conica è effettivamente un'iperbole, in quanto $-4 < \frac{9}{4}$. La conica ha equazione $x^2 - xy - 6y^2 - x + 18y - 16 = 0$ e la sua matrice associata è:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ --\frac{1}{2} & -6 & 9 \\ -\frac{1}{2} & 9 & -16 \end{pmatrix}.$$

Cerchiamo il suo centro di simmetria:

$$\begin{cases} x - \frac{1}{2}y - \frac{1}{2} = 0 \\ -\frac{1}{2}x - 6y + 9 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{6}{5} \\ y = \frac{7}{5}. \end{cases}$$

Dunque, il centro di simmetria è $C = (\frac{6}{5}, \frac{7}{5})$. Cerchiamo ora i punti impropri dell'iperbole:

$$\begin{cases} x^2 - xy - 6y^2 - xt + 18yt - 16t^2 = 0 \\ t = 0 \end{cases} \Rightarrow P_\infty = (3, 1, 0) \quad \text{e} \quad P'_\infty = (-2, 1, 0).$$

Gli asintoti sono le rette CP_∞ e CP'_∞:

$$CP_\infty\colon \frac{x - \frac{6}{5}}{3} = y - \frac{7}{5} \Rightarrow x - 3y + 3 = 0$$

e

$$CP'_\infty\colon \frac{x - \frac{6}{5}}{-2} = y - \frac{7}{5} \Rightarrow x + 2y - 4 = 0.$$

3. Le matrici associate sono:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & h & 0 \\ 0 & h & 1 & -h \\ 1 & 0 & -h & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & h \\ 0 & h & 1 \end{pmatrix}.$$

Dato che $|B| = -h^2$ e $|A| = 1 - h^2$, concludiamo subito che per $h = 0$ abbiamo un cono, mentre per $h = 1, -1$ abbiamo due paraboloidi ellittici. Sia $h \neq 0, 1, -1$. Da:

$$P_A(T) = \begin{vmatrix} 1 - T & 0 & 0 \\ 0 & 1 - T & h \\ 0 & h & 1 - T \end{vmatrix} = (1 - T)(T^2 - 2T + 1 - h^2),$$

vediamo che gli autovalori sono concordi per $-1 < h < 1$, $h \neq 0$. Quindi, per $-1 < h < 1$, $h \neq 0$ abbiamo degli ellissoidi reali e per $h < -1$ e $h > 1$ abbiamo degli iperboloidi ellittici.