CdL in Ingegneria Informatica (A-D e O-Z) - Ingegneria Elettronica (A-D e O-Z) -Ingegneria REA

Prova scritta di **Algebra lineare e Geometria**- 12 Settembre 2016

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.

I

In $\mathbb{R}^4$ è assegnato il sottospazio

$$V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 |\ hx + z = 0, (h + 1)x + t = 0, y = 0\}$$

al variare di $h \in \mathbb{R}$ e i vettori $w_1 = (0, 2, 1, 1)$, $w_2 = (2, 2, 0, 0)$ e $w_3 = (2, 0, 1, -1)$ con $W = \mathcal{L}(w_1, w_2, w_3) \subseteq \mathbb{R}^4$.

1. Determinare $V \cap W$.
2. Calcolare $V + W$, specificando se è somma diretta o meno.
3. Studiare l'endomorfismo $f\colon W \to W$ definito da:
$$\begin{aligned} f(w_1) &= hw_1 \\ f(w_2) &= w_2 + w_3 \\ f(w_3) &= hw_1 + w_2 + w_3, \end{aligned}$$
al variare di $h \in \mathbb{R}$, determinando Ker f e Im f.
4. Studiare la semplicità di f al variare di $h \in \mathbb{R}$ e determinare ove possibile una base di autovettori.

Soluzione

1. Dato che la matrice
$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$
ha rango 3, concludiamo che $\dim W = 3$ e che una sua base è $A = [w_1, w_2, w_3]$. Calcoliamo la sua equazione cartesiana: In tal caso:
$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ x & y & z & t \end{vmatrix} = 0$$
Dunque l'equazione cartesiana di W è $x - y + 2t = 0$.
Calcoliamo $V \cap W$ risolvendo il seguente sistema:
$$\begin{cases} y = 0 \\ z = -hx \\ t = -(h+1)x \\ x - y + 2t = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2t \\ y = 0 \\ z = 2ht \\ (2h+1)t = 0 \end{cases}$$

Da qui nascono due casi:
se $h = -\frac{1}{2} \Rightarrow$

$$\begin{cases} x = -2t \\ y = 0 \\ z = -t \end{cases}$$

$V \cap W = \{(-2t, 0, -t, t)\} \Rightarrow \dim V \cap W = 1.$

se $h \neq -\frac{1}{2} \Rightarrow$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \\ t = 0 \end{cases}$$

$V \cap W = \{(0, 0, 0, 0)\} \Rightarrow \dim(V \cap W) = 0.$

2. Per verificare se si tratta di somma diretta dobbiamo focalizzare l'attenzione sull'intersezione $V \cap W$ poichè è somma diretta se e solo se l'intersezione tra i due sottospazi è nulla. Dunque $V + W$ è somma diretta solo nel caso $h \neq -\frac{1}{2}$.

3. Dato che $\mathcal{A} = [w_1, w_2, w_3]$ è una base di W possiamo scrivere la matrice associata a f rispetto alla base $\mathcal{A}$:

$$M^{\mathcal{A}}(f) = \begin{pmatrix} h & 0 & h \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Essendo $|M^{\mathcal{A}}(f)| = 0 \ \forall h$, f non è mai isomorfismo. Questo vuol dire che $\operatorname{Ker} f \neq \{(0, 0, 0, 0)\} \ \forall h$.
Se $h \neq 0$ riducendo si ottiene:

$$\begin{pmatrix} h & 0 & h \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dunque, $\dim \operatorname{Im} f = \rho(M^{\mathcal{A}}(f)) = 2$ e una base di $\operatorname{Im} f$ è:

$$[hw_1, w_2 + w_3] = [(0, 2h, h, h), (4, 2, 1, -1)].$$

Inoltre, $\dim \operatorname{Ker} f = \dim W - \dim \operatorname{Im} f = 1$. Il nucleo si ottiene risolvendo il sistema lineare omogeneo derivato dalla matrice ottenuta con la riduzione:

$$\begin{cases} hx + hz = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x \\ z = -x \end{cases}$$

$$\operatorname{Ker} f = \{w \in W \mid [w]_{\mathscr{A}} = (a, a, -a)\} = \mathscr{L}(w_1 + w_2 - w_3) = \mathscr{L}((0, 4, 0, 2)).$$

Se $h = 0$ la matrice diventa

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Dunque, $\dim \operatorname{Im} f = \rho(M^{\mathcal{A}}(f)) = 1$ e una base di $\operatorname{Im} f$ è:

$$[w_2 + w_3] = [(4, 2, 1, -1)].$$

Inoltre, $\dim \operatorname{Ker} f = \dim W - \dim \operatorname{Im} f = 2$. Il nucleo si ottiene risolvendo il sistema lineare omogeneo derivato dalla matrice associata al nostro endomorfismo:

$$\{y+z=0 \Rightarrow \begin{cases} \forall x \\ z=-y \end{cases}$$

$$\operatorname{Ker} f = \{w \in W \mid [w]_{\mathscr{A}} = (a,b,-b)\} = \mathscr{L}(w_1, w_2 - w_3) = \mathscr{L}((0,2,1,1),(0,2,-1,1)).$$

4. Calcoliamo il polinomio caratteristico:

$$P(T) = \begin{vmatrix} h-T & 0 & h \\ 0 & 1-T & 1 \\ 0 & 1 & 1-T \end{vmatrix} = (h-T)(1-T)^2 - (h-T) =$$

$= (h-T)((1-T^2)-1) =$
$= (h-T)(1+T^2-2T-1) = (h-T)(T^2-2T) = 0.$

per cui gli autovalori sono $h, 0, 2$. Per $h \neq 0, 2$ essi sono tutti distinti di molteplicità algebrica pari a 1, da cui segue che f è semplice in tali casi. Sia $h = 0$. In tal caso, gli autovalori sono 0 e 2, con $m_0 = 2$ e $m_2 = 1$. Calcoliamo $\dim V_0 = \dim Kerf = 2$ quindi anche in questo caso f è semplice. Per $h = 2$ gli autovalori sono sempre 0 e 2 ma stavolta abbiamo l'autovalore $T = 2$ con $m_2 = 2$ e l'autovalore $T = 0$ con $m_0 = 1$. Calcolando l'autospazio $V_2 = Kerf_2$ si ottiene che $V_2 = \{(0,y,y)_{\mathcal{A}}\}$ da cuidim $V_2 = 1$ e quindi per $h = 2$ avremo che f non è semplice.
Base di autovettori esiste se e solo se l'endomorfismo è semplice, quindi per
$h \neq 0, 2$ calcoliamo i tre autospazi V_h, V_0, V_2:
$V_h = \operatorname{Ker} f_h = \{(x,0,0)_{\mathcal{A}}\}$ da cui $u_1 = (1,0,0)_{\mathcal{A}}$
$V_0 = \operatorname{Ker} f = \{(-z,-z,z)_{\mathcal{A}}\}$ da cui $u_2 = (-1,-1,1)_{\mathcal{A}}$
$V_2 = \operatorname{Ker} f_2 = \{(-\frac{h}{h-2}z, z, z)_{\mathcal{A}}\}$ da cui $u_3 = (-\frac{h}{h-2}, 1, 1)_{\mathcal{A}}$

$h = 0$ calcoliamo i due autospazi V_0, V_2:
$V_0 = \operatorname{Ker} f = \{(x,y,-y)_{\mathcal{A}}\}$ da cui $u_1 = (1,0,0)_{\mathcal{A}}, u_2 = (0,1,-1)_{\mathcal{A}}$
$V_2 = \operatorname{Ker} f_2 = \{(0,y,y)_{\mathcal{A}}\}$ da cui $u_3 = (0,1,1)_{\mathcal{A}}$

II

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1. Date le rette $p\colon y-2 = x+z+1 = 0$ e $q\colon z = x-y = 0$, verificare che esse sono sghembe e determinare la retta incidente entrambe le rette date e passante per il punto $R = (-1,0,0)$.

2. Date le rette $r\colon 2x+y = 0$ e $s\colon y-2 = 0$ e dati i punti $A = (1,-2)$ e $B = (0,2)$ del piano $z = 0$, determinare e studiare il fascio di coniche tangenti alla retta r in A e alla retta s in B.

3. Studiare, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$, il fascio di quadriche ϕ di equazione:

$$\phi\colon \lambda y^2 + 2(\lambda+1)yz + \lambda xz - 2x = 0.$$

Soluzione

1. Le rette sono sghembe in quanto:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 3 \neq 0.$$

Cerchiamo il piano π_1 contenente la retta p e passante per R :

$$\lambda(y-2) + \mu(x+z+1) = 0$$

Imponiamo il passaggio per il punto R:

$$\lambda(0-2)+\mu(-1+0+1)=0 \Rightarrow \lambda=0$$

Dunque,

$$\pi_1 : x+z+1=0$$

Cerchiamo il piano π_2 contenente la retta q e passante per R :

$$\lambda z+\mu(x-y)=0$$

Imponiamo il passaggio per il punto R:

$$\lambda(0)+\mu(-1)=0 \Rightarrow \mu=0$$

Dunque,

$$\pi_2 : z=0$$

Quindi la retta cercata è $\pi_1 \cap \pi_2$:

$$\begin{cases} x+z+1=0 \\ z=0 \end{cases}$$

2. La retta AB ha equazioni:

$$\frac{x-1}{-1}=\frac{y+2}{4} \Rightarrow 4x+y-2=0.$$

Quindi, il fascio cercato ha equazione:

$$h(2x+y)(y-2)+(4x+y-2)^2=0 \Rightarrow 16x^2+(h+1)y^2+(2h+8)xy+(-4h-16)x+(-2h-4)y+4=0$$

Le matrici associate al fascio di coniche sono:

$$B=\begin{pmatrix} 16 & h+4 & -2h-8 \\ h+4 & h+1 & -h-2 \\ -2h-8 & -h-2 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A=\begin{pmatrix} 16 & h+4 \\ h+4 & h+1 \end{pmatrix}.$$

Le coniche spezzate del fascio sono solo due usate per determinare l'equazione. Una si ottiene per $h=0$, l'altra è la conica nascosta. Quindi per $h \neq 0$ abbiamo coniche irriducibili. Calcoliamo $|A|$:

$$|A|=\begin{vmatrix} 16 & h+4 \\ h+4 & h+1 \end{vmatrix}=16h+16-(h^2+16+8h)=8h-h^2$$

Dunque, per $|A|>0 \Rightarrow 8h-h^2>0 \Rightarrow 0<h<8$ abbiamo ellissi ma non abbiamo alcuna circonfeenza.

Per $h=8$ abbiamo una parabola.
Per $h<0$ e $h>8$ abbiamo delle iperboli; nel caso $16+h+1=0 \Rightarrow h=-17$ abbiamo iperbole equilatera.

3. Dalla matrice associata alla generica quadrica avremo:

$$|B|=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \frac{\lambda}{2} & -1 \\ 0 & \lambda & \lambda+1 & 0 \\ \frac{\lambda}{2} & \lambda+1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=(\lambda+1)^2 \geq 0$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \frac{\lambda}{2} \\ 0 & \lambda & \lambda+1 \\ \frac{\lambda}{2} & \lambda+1 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{\lambda^3}{4}$$

Per $\lambda \neq -1$ si ha $\rho(B) = 4$ e si hanno quadriche non degeneri a punti iperbolici, mentre per $\lambda = -1$ si ha $\rho(B) = 3$ e quindi si ha un cono dato che per questo valore di λ il $|A| \neq 0$. Per $\lambda = 0$ si trova il paraboloide iperbolico di equazione $yz - x = 0$. Per tutti gli altri valori del parametro e cioè per $\lambda \neq -1, 0$ si hanno iperboloidi iperbolici o ellissoidi immaginari. Calcoliamo allora il polinomio caratteristico di A:

$$P_A(T) = \begin{vmatrix} -T & 0 & \frac{\lambda}{2} \\ 0 & \lambda - T & \lambda+1 \\ \frac{\lambda}{2} & \lambda+1 & -T \end{vmatrix} =$$

$$= -T^3 + \lambda T^2 + (\frac{\lambda^2}{4} + \lambda^2 + 2\lambda + 1)T - \frac{\lambda^3}{4} = 0.$$

Applicando la regola dei segni di Cartesio si nota che non potranno mai essere o tutte permanenze o tutte variazioni e quindi ellissoidi dato che il coefficiente di T è somma di quadrati pertanto sempre positivo. Concludiamo allora che per $\lambda \neq -1, 0$ si hanno iperboloidi iperbolici.