# CdL in Ingegneria Industriale (A-E e F-O)

Prova scritta di **Algebra lineare e Geometria**- 12 Luglio 2016

---

*Durata della prova: tre ore.*
*È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.*
*Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.*
*È vietato consultare libri o appunti.* Compito A

---

**I**

È assegnato l'endomorfismo $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definita dalle seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} f(1,1,1,1) &= (h+1, h+1, 1, 2h+1) \\ f(0,1,1,0) &= (h,0,0,1) \\ f(0,1,0,1) &= (1,0,0,h) \\ f(1,0,2,2) &= (2h+2, 4h+1, 1, 3h+2), \end{aligned}$$

al variare di $h \in \mathbb{R}$.

1. Determinare la matrice associata a $f$ rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^4$.
2. Studiare $f$, al variare di $h \in \mathbb{R}$, determinando in ciascun caso $\operatorname{Ker} f$ e $\operatorname{Im} f$ e le loro equazioni cartesiane.
3. Nel caso $h = 1$ verificare che $\mathbb{R}^4 = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f$.
4. Posto $V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid y = z\}$, determinare il valore di $h \in \mathbb{R}$ per il quale $f$ induce un endomorfismo $f'\colon V \to V$ e studiare la semplicità di $f'$.
5. Diagonalizzare la matrice:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

*Soluzione*

1. Si vede che:
$$M(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & h & 1 \\ 1 & -h & h & h \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ h & 0 & 1 & h \end{pmatrix}.$$

2. Dal momento che $|M(f)| = h(h^2-1)$, concludiamo che per $h \neq 0, 1, -1$ $f$ è un isomorfismo, per cui $f$ è iniettiva e suriettiva. In particolare, $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^4$ e $\operatorname{Ker} f = \{(0,0,0,0)\}$.

   Sia $h = 0$. In tal caso:
$$M(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{\text{riducendo}}{\longmapsto} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

per cui $\dim \operatorname{Im} f = \rho(M(f)) = 3$ e una sua base è $[(0,1,1,0),(0,0,0,1),(1,0,0,0)]$. Una sua equazione cartesiana è data da:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ x & y & z & t \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow z - y = 0.$$

Dunque, $\operatorname{Im} f = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid y - z = 0\}$. Inoltre, $\dim \operatorname{Ker} f = 4 - 3 = 1$ e:

$$\operatorname{Ker} f = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid t = 0,\ x = 0,\ z = 0\} = \mathscr{L}((0,1,0,0)).$$

Sia $h = 1$. In tal caso:

$$M(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{\text{riducendo}}{\longmapsto} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

per cui $\dim \operatorname{Im} f = \rho(M(f)) = 3$ e una sua base è $[(0,1,1,1),(0,-1,0,0),(1,1,0,1)]$. Una sua equazione cartesiana è data da:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ x & y & z & t \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x + z - t = 0.$$

Dunque, $\operatorname{Im} f = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + z - t = 0\}$. Inoltre, $\dim \operatorname{Ker} f = 4 - 3 = 1$ e:

$$\operatorname{Ker} f = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid z + t = 0,\ x - y = 0,\ x = 0\} = \mathscr{L}((0,0,1,-1)).$$

Sia $h = -1$. In tal caso:

$$M(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \overset{\text{riducendo}}{\longmapsto} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

per cui $\dim \operatorname{Im} f = \rho(M(f)) = 3$ e una sua base è $[(0,1,1,-1),(0,1,0,0),(1,-1,0,-1)]$. Una sua equazione cartesiana è data da:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ x & y & z & t \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x + z + t = 0.$$

Dunque, $\operatorname{Im} f = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + z - t = 0\}$. Inoltre, $\dim \operatorname{Ker} f = 4 - 3 = 1$ e:

$$\operatorname{Ker} f = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid -z + t = 0,\ x + y - 2z = 0,\ x = 0\} = \mathscr{L}((0,2,1,1)).$$

3. Sia $h = 1$. In tal caso:

$$\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + z - t = 0,\ z + t = 0,\ x - y = 0,\ x = 0\} = \{(0,0,0,0)\}.$$

Dunque, la somma di $\operatorname{Ker} f$ e $\operatorname{Im} f$ è diretta. Inoltre:

$$\dim(\operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f) = \dim \operatorname{Im} f + \dim \operatorname{Ker} f = 3 + 1 = 4,$$

per cui, essendo $\operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f \subseteq \mathbb{R}^4$, si ha che necessariamente $\operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f = \mathbb{R}^4$.

4. Essendo $V = \mathscr{L}((1,0,0,0),(0,1,1,0),(0,0,0,1))$, si ha che:

$$f(V) = \mathscr{L}(f(1,0,0,0), f(0,1,1,0), f(0,0,0,1)) = \mathscr{L}((0,1,1,h),(h,0,0,1),(1,h,0,h)).$$

$f$ induce un endomorfismo di $V$ se $f(V) \subseteq V$, cioè se $(0,1,1,h),(h,0,0,1),(1,h,0,h) \in V$. Questi tre vettori verificano allo stesso tempo l'equazione cartesiana di $V$ per $h = 0$. Dunque, per $h = 0$ $f$ induce un endomorfismo $f'$ di $V$ e tale endomorfismo è tale che:

$$\begin{aligned} f'(1,0,0,0) &= f(1,0,0,0) = (0,1,1,0) \\ f'(0,1,1,0) &= f(0,1,1,0) = (0,0,0,1) \\ f'(0,0,0,1) &= f(0,0,0,1) = (1,0,0,0). \end{aligned}$$

Detta $\mathscr{A} = [(1,0,0,0),(0,1,1,0),(0,0,0,1)]$, è immediato notare che:

$$\begin{aligned} [f'(1,0,0,0)]_{\mathscr{A}} &= [(0,1,1,0)]_{\mathscr{A}} = (0,1,0) \\ [f'(0,1,1,0)]_{\mathscr{A}} &= [(0,0,0,1)]_{\mathscr{A}} = (0,0,1) \\ [f'(0,0,0,1)]_{\mathscr{A}} &= [(1,0,0,0)]_{\mathscr{A}} = (1,0,0). \end{aligned}$$

Dunque:

$$M^{\mathscr{A}}(f') = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Inoltre:

$$P(T) = \begin{vmatrix} -T & 0 & 1 \\ 1 & -T & 0 \\ 0 & 1 & -T \end{vmatrix} = -T^3 + 1 = (1-T)(T^2 - T + 1).$$

Tale polinomio ha una sola soluzione reale e due immaginarie. Ciò vuol dire che $f'$ non è semplice.

5. Si vede che:

$$P_A(T) = \begin{vmatrix} 1-T & 0 & 0 \\ -1 & 2-T & 1 \\ 0 & 0 & 1-T \end{vmatrix} = (1-T)^2(2-T).$$

Gli autovalori sono $T = 1$ e $T = 2$, con $m_1 = 2$ e $m_2 = 1$. Sia $T = 1$:

$$A - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

per cui:

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid -x + y + z = 0\} = \mathscr{L}((1,1,0),(1,0,1)).$$

Sia $T = 2$:

$$A - 2I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xmapsto{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

per cui:

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid -x = 0,\ z = 0\} = \mathscr{L}((0,1,0)).$$

Quindi, $A$ è diagonalizzabile ed è simile alla matrice diagonale:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

La matrice diagonalizzante è:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

## II

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1. Determinare le equazioni della retta $t$ passante per $P = (1, 2, -1)$, ortogonale ed incidente la retta $r$ di equazioni:
$$r\colon \begin{cases} 2x + y - 3z - 1 = 0 \\ x - 3y + 2z + 1 = 0. \end{cases}$$

2. Studiare il fascio $\varphi$ di coniche di equazioni:
$$\begin{cases} z = 0 \\ 3x^2 - kxy + 2ky - 4k = 0, \end{cases}$$
determinando, in particolare, punti base e coniche spezzate.

3. Detta $\Gamma$ la conica del fascio $\varphi$ passante per il punto $Q = (-2, 1, 0)$, determinare il centro di simmetria, gli assi di simmetria e una forma canonica di $\Gamma$.

4. Determinare l'equazione del cono avente vertice $V = (0, 0, 1)$ e avente la conica $\Gamma$ come direttrice.

5. Determinare le quadriche contenenti la conica:
$$C\colon \begin{cases} z = 0 \\ xy + 3x + 3y + 7 = 0, \end{cases}$$
passanti per i punti $A = (-1, 1, 1)$, $B = (0, 1, 1, 0)$ e tangenti in $B$ alla retta $s\colon t = y - z = 0$.

*Soluzione*

1. Sia $\pi$ il piano contenente $r$ e passante per $P$ e sia $\pi'$ il piano perpendicolare a $r$ e passante per $P$. La retta cercata è l'intersezione $t = \pi \cap \pi'$.

   I piani contenenti $r$ hanno equazione:
$$\lambda(2x + y - 3z - 1) + \mu(x - 3y + 2z + 1) = 0.$$
   Imponendo il passaggio per $P$ otteniamo $\lambda = \mu$, per cui $\pi\colon 3x - 2y - z = 0$. Parametri direttori della retta $r$ sono $(1, 1, 1)$, per cui $\pi'\colon x + y + z - 2 = 0$. La retta cercata è:
$$\begin{cases} 3x - 2y - z = 0 \\ x + y + z - 2 = 0. \end{cases}$$

2. La conica che si ottiene per $k = \infty$ ha equazione $xy - 2y + 4 = 0$. Vediamo di che conica si tratta. Le matrici associate sono:
$$B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$
   Essendo $|B| = -1$, $|A| = -\frac{1}{4}$ e $\operatorname{Tr}(A) = 0$, concludiamo che la conica è un'iperbole equilatera. Classifichiamo, ora, le altre coniche del fascio. Si ha:
$$B = \begin{pmatrix} 3 & -\frac{k}{2} & 0 \\ -\frac{k}{2} & 0 & k \\ 0 & k & -4k \end{pmatrix},$$
   per cui $|B| = k^2(k - 3)$. Dunque, le coniche spezzate del fascio si ottengono per $k = 0$ e $k = 3$ ed esse hanno equazioni, rispettivamente, $x^2 = 0$ e $(x - 2)(x - y + 2) = 0$. Intersecando le due coniche spezzate, otteniamo i punti base $P = (0, 2)$ e $P_\infty = (0, 1, 0)$, ciascuno contato due volte. Inoltre, essendo:
$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -\frac{k}{2} \\ -\frac{k}{2} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{k^2}{4},$$
   concludiamo che per $k \neq 0, 3$ le coniche sono tutte delle iperboli. L'unica iperbole equilatera è quella che si ottiene per $k = \infty$.

3. Imponendo il passaggio per il punto $Q$ all'equazione del fascio troviamo $12 = 0$, che è impossibile. Questo vuol dire che la conica del fascio passante per $Q$ è quella nascosta, cioè quella di equazione:

$$xy - 2y + 4 = 0.$$

Abbiamo già visto che $|B| = -1$ e $|A| = -\frac{1}{4}$. Il centro di simmetria si ottiene dal sistema:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}y = 0 \\ \frac{1}{2}x - 1 = 0, \end{cases}$$

per cui $C = (0, 2)$. Cerchiamo gli autovalori di $A$:

$$P_A(T) = \begin{vmatrix} -T & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -T \end{vmatrix} = T^2 - \frac{1}{4}.$$

Per $T = \frac{1}{2}$ vediamo che l'autospazio associato ha equazione $x - y = 0$. Dunque, un primo asse di simmetria ha equazione $x - y + k = 0$ e passa per $C$, per cui ha equazione $x - y + 2 = 0$.

Per $T = -\frac{1}{2}$ vediamo che l'autospazio associato ha equazione $x + y = 0$. Dunque, l'altro asse di simmetria ha equazione $x + y + k = 0$ e passa per $C$, per cui ha equazione $x + y - 2 = 0$.

Per quel che riguarda la forma conica, sappiamo che una sua equazione ridotta è del tipo $\alpha X^2 + \beta Y^2 = \gamma$. Sappiamo che:

$$\gamma = -\frac{|B|}{|A|} = -4.$$

Scegliendo $\alpha = -\frac{1}{2}$ e $\beta = \frac{1}{2}$, troviamo una sua forma canonica:

$$-\frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{2}Y^2 = -4 \Rightarrow \frac{X^2}{8} - \frac{Y^2}{8} = 1.$$

4. Detto $P = (\alpha, \beta, 0)$ il punto generico di $\Gamma$, sappiamo che $\alpha\beta - 2\alpha + 4 = 0$. Le retta $PV$ ha equazione:

$$PV\colon \frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = 1 - z \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \dfrac{x}{1-z} \\ \beta = \dfrac{y}{1-z}. \end{cases}$$

Sostituendo in $\alpha\beta - 2\alpha + 4 = 0$ otteniamo:

$$\frac{xy}{(1-z)^2} - \frac{2x}{1-z} + 4 = 0 \Rightarrow xy - 2x(1-z) + 4(1-z)^2 = 0.$$

5. Le quadriche contenenti la conica $C$ hanno equazione:

$$xy + 3x + 3y + 7 + z(ax + by + cz + d) = 0.$$

Imponendo il passaggio per $A$ e $B$ troviamo $-a + b + c + d + 6 = 0$ e $b + c = 0$. Intersechiamo la quadrica con la retta $s$:

$$\begin{cases} xy + 3xt + 3yt + 7t^2 + z(ax + by + cz + dt) = 0 \\ t = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (b+c)y^2 + (a+1)xy = 0 \\ t = 0 \\ z = y. \end{cases}$$

Affinché la retta $s$ sia tangente deve essere certamente $a + 1 = 0$. Dunque, le quadriche cercate sono quelle tali che:

$$\begin{cases} a + 1 = 0 \\ b + c = 0 \\ -a + b + c + d + 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ c = -b \\ d = -7 \end{cases}$$

e hanno equazione:

$$xy + 3x + 3y + 7 + z(-x + by - bz - 7) = 0 \Rightarrow xy - xz + byz - bz^2 + 3x + 3y - 7z + 7 = 0.$$