CdL in Ingegneria Industriale (A-E e F-O)

Prova scritta di **Algebra lineare e Geometria**- 1 Febbraio 2016

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.

I

È assegnato l'endomorfismo $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito dalle seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} f(2,1,1) &= (h+7, h+6, 7) \\ f(1,1,2) &= (2h+3, 2h+3, 6) \\ f(1,0,1) &= (h+4, h+3, 5) \end{aligned}$$

al variare di $h \in \mathbb{R}$.

1. Determinare la matrice associata a f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.
2. Studiare f, al variare di $h \in \mathbb{R}$, determinando in ciascun caso $\operatorname{Ker} f$ e $\operatorname{Im} f$.
3. Calcolare $f^{-1}(3,3,2)$ al variare di $h \in \mathbb{R}$.
4. Discutere la semplicità di f al variare di $h \in \mathbb{R}$.
5. Nel caso $h = 1$ determinare una base di autovettori per f.

Soluzione

1. Da:

$$\begin{aligned} f(2,1,1) &= (h+7, h+6, 7) \\ f(1,1,2) &= (2h+3, 2h+3, 6) \\ f(1,0,1) &= (h+4, h+3, 5) \end{aligned}$$

otteniamo:

$$\begin{cases} 2f(e_1) + f(e_2) + f(e_3) = (h+7, h+6, 7) \\ f(e_1) + f(e_2) + 2f(e_3) = (2h+3, 2h+3, 6) \\ f(e_1) + f(e_3) = (h+4, h+3, 5) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(e_1) = (4,3,3) \\ f(e_2) = (-1,0,-1) \\ f(e_3) = (h,h,2). \end{cases}$$

Dunque:

$$M(f) = \begin{pmatrix} 4 & -1 & h \\ 3 & 0 & h \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Essendo $|M(f)| = 6 - 2h$, concludiamo che per $h \neq 2$ f è un isomorfismo, cioè f è iniettiva e suriettiva. In particolare, $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^3$ e $\operatorname{Ker} f = \{(0,0,0)$.

Sia $h = 3$. In tal caso:

$$M(f) = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \overset{\text{riducendo}}{\longmapsto} \begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque, $\dim \operatorname{Im} f = \rho(M(f)) = 2$ e una sua base è $[(4,3,3), (-1,0,-1)]$. Inoltre, $\dim \operatorname{Ker} f = 3 - \dim \operatorname{Im} f = 1$ e:

$$\operatorname{Ker} f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 4x - y + 3z = 0,\ 3x + 3z = 0\} = \mathscr{L}((1,1,-1)).$$

3. Occorre risolvere il sistema:
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -1 & h & 3 \\ 3 & 0 & h & 3 \\ 3 & -1 & 2 & 2 \end{array}\right).$$
Per $h \neq 3$ si ha $|M(f)| \neq 0$, per cui è possibile usare il metodo di Cramer e ottenere:
$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -1 & h \\ 3 & 0 & h \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{6-2h} = 1$$
$$y = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 3 & h \\ 3 & 3 & h \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix}}{6-2h} = 1$$
$$z = \frac{\begin{vmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{6-2h} = 0.$$
Dunque, per $h \neq 3$ si ha $f^{-1}(3,3,2) = \{(1,1,0)\}$. Sia, ora, $h = 3$. Abbiamo:
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -1 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & 3 & 3 \\ 3 & -1 & 2 & 2 \end{array}\right) \overset{\text{riducendo}}{\longmapsto} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -1 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$
per cui:
$$\begin{cases} 4x - y + 3z = 3 \\ 3x + 3z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x \\ z = 1 - x. \end{cases}$$
Dunque, possiamo dire che $f^{-1}(3,3,2) = \{(x, x, 1-x)\}$ per $h = 3$.

4. Si vede facilmente che:
$$P(T) = \begin{vmatrix} 4-T & -1 & h \\ 3 & -T & h \\ 3 & -1 & 2-T \end{vmatrix} = -T^3 + 6T^2 + (2h-11)T + 6 - 2h.$$
Essendo $P(1) = 0$ e usando il metodo di Ruffini, troviamo:
$$P(T) = -(T-1)(T^2 - 5T + 6 - 2h).$$
L'equazione $T^2 - 5T + 6 - 2h = 0$ ha $\Delta = 8h + 1$. Dunque, per $h < -\frac{1}{8}$ possiamo affermare che $\Delta < 0$, per cui f certamente non è semplice. Per $h \geq -\frac{1}{8}$ si ha $\Delta \geq 0$. In tal caso, occorre confrontare gli autovalori, che sono:
$$1, \frac{5+\sqrt{8h+1}}{2}, \frac{5-\sqrt{8h+1}}{2}.$$
Si vede facilmente che l'equazione $\frac{5+\sqrt{8h+1}}{2} = 1$ è impossibile, mentre l'equazione $\frac{5-\sqrt{8h+1}}{2} = 1$ ha soluzione $h = 1$. Questo vuol dire che per $h > -\frac{1}{8}$, $h \neq 1$, f è certamente semplice, perché le soluzioni del polinomio caratteristico sono tutte reali e f ammette tre autovalori tutti di molteplicità algebrica 1.
Sia $h = -\frac{1}{8}$. In tal caso, gli autovalori sono $T = 1$ e $T = \frac{5}{2}$, quest'ultimo con molteplicità algebrica 2, mentre l'autovalore 1 è semplice. Dunque, f è semplice se $\dim V_{\frac{5}{2}} = m_{\frac{5}{2}} = 2$. Sappiamo che $V_{\frac{5}{2}} = \operatorname{Ker} f_{\frac{5}{2}}$, dove $f_{\frac{5}{2}} = f - \frac{5}{2}i$:
$$M(f_{\frac{5}{2}}) = M(f) - \frac{5}{2}I = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -1 & -\frac{1}{8} \\ 3 & -\frac{5}{2} & -\frac{1}{8} \\ 3 & -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \overset{\text{riducendo}}{\longmapsto} \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -1 & -\frac{1}{8} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dal momento che questa matrice ha rango 2, concludiamo che $\dim V_{\frac{5}{2}} = 1 < 2 = m_{\frac{5}{2}}$. Ciò significa che per $h = -\frac{1}{8}$ f non è semplice.

Sia $h = 1$. In tal caso gli autovalori sono 1 e 4, con $m_1 = 2$ e $m_4 = 1$. f è semplice se $\dim V_1 = m_1 = 2$. Sappiamo che $V_1 = \operatorname{Ker} f_1$, dove $f_1 = f - i$ e:

$$M(f_1) = M(f) - I = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Quindi, $\rho(M(f_1)) = 1$ e $\dim V_1 = 2 = m_1$. Questo vuol dire che per $h = 1$ f è semplice.

5. Da quanto visto in precedenza per $h = 1$ gli autovalori sono 1 e 4. Abbiamo anche visto che:

$$M(f_1) = M(f) - I = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

per cui $V_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x - y + z = 0\} = \mathscr{L}((1, 3, 0), (0, 1, 1))$. Per l'autovalore 4 si ha:

$$M(f_4) = M(f) - 4I = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 3 & -4 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \overset{\text{riducendo}}{\longmapsto} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

per cui:

$$V_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid -y + z = 0, 3x - 3y = 0\} = \mathscr{L}((1, 1, 1)).$$

Dunque, possiamo concludere che una base di autovettori è $[(1, 3, 0), (0, 1, 1), (1, 1, 1)]$.

II

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1. Determinare le equazioni della retta r passante per l'origine e perpendicolare ed incidente la retta di equazioni $2x + y - 6 = x - z = 0$.

2. Studiare il fascio di coniche di equazione:

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y-2)^2 + h(x + y - 1)^2 = 0 \\ z = 0, \end{cases}$$

determinandone, in particolare, le equazioni delle eventuali circonferenze, parabole ed iperboli equilatere.

3. Detta Γ la conica del fascio passante per $A = (1, 1, 0)$, determinare gli asintoti, gli assi ed una equazione ridotta di Γ.

4. Determinare il luogo delle rette passanti per O e che formano un angolo di ampiezza $\frac{\pi}{3}$ con la retta $2x - y = x - z = 0$.

Soluzione

1. Sia π_1 il piano contenente s e passante per O. I piani contenenti s hanno equazione:

$$\lambda(2x + y - 6) + \mu(x - z) = 0 \Rightarrow -6\lambda = 0.$$

Dunque, $\pi_1\colon x - z = 0$. Cerchiamo il piano π_2 perpendicolare a s e passante per O. La retta s ha parametri direttori $(1, -2, 1)$, per cui $\pi_2\colon x - 2y + z = 0$. La retta cercata è $\pi_1 \cap \pi_2$:

$$\begin{cases} x - z = 0 \\ x - 2y + z = 0. \end{cases}$$

2. La matrice associata al fascio di coniche è:

$$B = \begin{pmatrix} h+1 & h & -h-1 \\ h & h+1 & -h-2 \\ -h-1 & -h-2 & h+5 \end{pmatrix}.$$

Si ha $|B| = 4h$. Dunque, le coniche spezzate del fascio sono quella che si ottiene per $h = 0$, che è $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 0$, cioè:

$$[(x-1) + i(y-2)][(x-1) - i(y-2)] = 0,$$

che sarebbe la circonferenza di raggio nullo, e la conica nascosta $(x+y-1)^2 = 0$. I punti base si ottengono dal sistema:

$$\begin{cases} [(x-1) + i(y-2)][(x-1) - i(y-2)] = 0 \\ (x+y-1)^2 = 0. \end{cases}$$

Otteniamo i punti $A = (i, 1-i)$ e $B = (-i, 1+i)$, entrambi contati due volte. Inoltre, $|A| = 2h+1$. Dunque, per $h < -\frac{1}{2}$ abbiamo delle iperboli, tra le quali quella equilatera si ottiene per $h = -1$, in quanto $\mathrm{Tr}(A) = 2h+2$, e ha equazione $-2xy - 2y + 4 = 0$. Per $h = -\frac{1}{2}$ abbiamo una parabola, di equazione $\frac{1}{2}x^2 - xy + \frac{1}{2}y^2 - x - 3y + \frac{9}{2} = 0$. Per $h > -\frac{1}{2}$, $h \neq 0$, abbiamo delle ellissi. Sappiamo che $\mathrm{Tr}(A) \cdot |B| = 2h(2h+2) > 0$ se e solo se $h < -1$ e $h > 0$. Dunque, per $h > 0$ le ellissi sono immaginarie, mentre per $-\frac{1}{2} < h < 0$ le ellissi sono tutte reali. L'unica circonferenza è quella di raggio nullo trovata in precedenza.

3. Imponendo il passaggio per il punto A troviamo:

$$1 + h = 0 \Rightarrow h = -1.$$

Dunque, la conica cercata è l'iperbole equilatera trovata in precedenza di equazione $xy + y - 2 = 0$. Cerchiamo i punti impropri dell'iperbole:

$$\begin{cases} xy + yt - 2t^2 = 0 \\ t = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy = 0 \\ t = 0. \end{cases}$$

Dunque, essi sono $P_\infty = (1,0,0)$ e $P'_\infty = (0,1,0)$. Il centro di simmetria C si ottiene risolvendo il sistema associato alle prime due righe della matrice associata B:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}y = 0 \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 0. \end{cases}$$

Dunque, il centro è $C = (-1, 0)$ e gli asintoti sono le rette che congiungono C con i due punti impropri $P_\infty = (1,0,0)$ e $P'_\infty = (0,1,0)$, per cui sono $x = -1$ e $y = 0$. Cerchiamo, ora, una sua forma ridotta. Essa è del tipo $\alpha X^2 + \beta Y^2 = \gamma$, dove $-\alpha\beta\gamma = |B| = \frac{1}{4}$, $\alpha\beta = |A| = -\frac{1}{4}$ e $\alpha + \beta = \mathrm{Tr}(A) = 0$. Questo implica che $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = -\frac{1}{2}$ e $\gamma = 1$. Dunque, una forma ridotta è $\frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{2}Y^2 = 1$.

Per quel che riguarda gli assi di simmetria, occorre prima di tutto determinare gli autovalori di A. Si vede facilmente che sono $\frac{1}{2}$ e $-\frac{1}{2}$. Da:

$$A - \frac{1}{2}I = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

vediamo che l'autospazio associato all'autovalore $\frac{1}{2}$ ha equazione $x - y = 0$. Un primo asse di simmetria è parallelo a questa retta e passa per C, per cui ha equazione $x - y + 1 = 0$. Analogamente, da:

$$A + \frac{1}{2}I = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

vediamo che l'autospazio associato all'autovalore $-\frac{1}{2}$ ha equazione $x + y = 0$. L'altro asse di simmetria è parallelo a questa retta e passa per C, per cui ha equazione $x + y + 1 = 0$.

Alternativamente, era possibile osservare che la parabola è traslata della parabola $XY = 2$ e dedurre che i suoi assi di simmetria sono le rette parallele alle due bisettrici degli assi cartesiani e passanti per C, ottenendo, ovviamente, le rette $x - y + 1 = 0$ e $x + y + 1 = 0$.

4. Le rette passanti per O hanno equazioni:

$$\begin{cases} x = lt \\ y = mt \\ z = nt. \end{cases}$$

Dal momento che la retta data ha parametri direttori $(1, 2, 1)$, le rette cercate sono tali che:

$$\frac{l + 2m + n}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}\sqrt{6}} = \pm\frac{1}{2} \Rightarrow l^2 + m^2 + n^2 - 4lm - 4ln - 4mn = 0.$$

Da $l = \frac{x}{t}$, $m = \frac{y}{t}$ e $n = \frac{y}{t}$, sostituendo otteniamo che deve essere:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4xy - 4xz - 4yz = 0.$$

Questa è l'equazione del luogo cercato.