CdL in Ingegneria Informatica (P-Z) - Ingegneria Elettronica (P-Z)

Prova in itinere di **Algebra lineare**, corso di **Algebra lineare e Geometria** - 8 Maggio 2015

Durata della prova: due ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti. Compito A

SVOLGERE SOLTANTO L'ESERCIZIO A OPPURE SOLTANTO L'ESERCIZIO B.

A

È assegnato l'endomorfismo $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da:

$$M(f) = \begin{pmatrix} h & 1 & 2 \\ 1 & h & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

al variare di $h \in \mathbb{R}$.

1) Studiare f al variare di $h \in \mathbb{R}$, determinando $\operatorname{Ker} f$ e $\operatorname{Im} f$.
2) Dato $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0\}$, calcolare $f(V)$ al variare di $h \in \mathbb{R}$, specificandone in ciascun caso la dimensione.
3) Nel caso $h = 0$ studiare la semplicità di f e determinare gli autospazi.
4) Risolvere, al variare di $h \in \mathbb{R}$, il seguente sistema:

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 2y - z = -1 \\ hx + (h-1)y + z = -1 \\ -hx + y + z = h - 5. \end{cases}$$

Soluzione

1) Dal momento che $|M(f)| = h^2 - 1$, concludiamo che per $h \neq 1, -1$ f è un isomorfismo, cioè f è iniettiva, per cui $\operatorname{Ker} f = \{(0,0,0)\}$, e f è suriettiva, per cui $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^3$.

Sia $h = 1$. In tal caso:

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{\text{riducendo}}{\longmapsto} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque, $\dim \operatorname{Im} f = \rho(M(f)) = 2$ e una base di $\operatorname{Im} f$ è $[(1,1,1),(2,-2,1)]$. Inoltre, $\dim \operatorname{Ker} f = 3 - \dim \operatorname{Im} f = 1$ e:

$$\operatorname{Ker} f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0,\ -3z = 0\} = \mathscr{L}((1,-1,0)).$$

Sia $h = -1$. In tal caso:

$$M(f) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{\text{riducendo}}{\longmapsto} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Dunque, $\dim \operatorname{Im} f = \rho(M(f)) = 2$ e una base di $\operatorname{Im} f$ è $[(-1,1,1),(1,-1,1)]$. Inoltre, $\dim \operatorname{Ker} f = 3 - \dim \operatorname{Im} f = 1$ e:

$$\operatorname{Ker} f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid -x + y + 2z = 0,\ 2y + 3z = 0\} = \mathscr{L}((1,-3,2)).$$

2) Dal momento che $V = \mathscr{L}((1,0,1),(0,1,1))$, abbiamo $f(V) = \mathscr{L}(f(1,0,1), f(0,1,1))$. Da:

$$\begin{pmatrix} h & 1 & 2 \\ 1 & h & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h+2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} h & 1 & 2 \\ 1 & h & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ h-2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

troviamo $f(1,0,1) = (h+2,-1,2)$ e $f(0,1,1) = (3,h-2,2)$, per cui $f(V) = \mathscr{L}((h+2,-1,2),(3,h-2,2))$. Inoltre, da:

$$\begin{pmatrix} h+2 & -1 & 2 \\ 3 & h-2 & 2 \end{pmatrix} \overset{\text{riducendo}}{\longmapsto} \begin{pmatrix} h+2 & -1 & 2 \\ 1-h & h-1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque, per $h \neq 1$ si ha che $\dim f(V) = 2$ e una sua base è $[(h+2,-1,2),(3,h-2,2)]$, mentre per $h = 1$ si ha $\dim f(V) = 1$ e $f(V) = \mathscr{L}((3,-1,2))$.

3) Sia $h = 0$. Allora:

$$P(T) = \begin{vmatrix} -T & 1 & 2 \\ 1 & -T & -2 \\ 1 & 1 & 1-T \end{vmatrix} = (1-T)(T^2-1) = -(1-T)^2(1+T).$$

Quindi, gli autovalori sono 1 e -1, con $m_1 = 2$ e $m_{-1} = 1$. Sappiamo che $1 \leq \dim V_{-1} \leq m_{-1} = 1$, per cui $\dim V_{-1} = m_{-1} = 1$, mentre $1 \leq \dim V_1 \leq m_1 = 2$. Dunque, f sarà semplice se $\dim V_1 = m_1 = 2$.

Sia $T = 1$. Allora, $V_1 = \mathrm{Ker}(f_1)$, dove $f_1 = f - i$ e:

$$M(f_1) = M(f) - I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{\text{riducendo}}{\longmapsto} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque, $\dim V_1 = 3 - \rho(M(f_1)) = 3 - 2 = 1 < m_1 = 2$. Questo vuol dire che f non è semplice. Inoltre:

$$V_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid -x+y+2z = 0,\ x+y = 0\} = \mathscr{L}((1,-1,1)).$$

Sia $T = -1$. Allora, $V_{-1} = \mathrm{Ker}(f_{-1})$, dove $f_{-1} = f + i$ e:

$$M(f_{-1}) = M(f) + I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \overset{\text{riducendo}}{\longmapsto} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque:

$$V_{-1} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+2z = 0,\ 4z = 0\} = \mathscr{L}((1,-1,0)).$$

4) Riduciamo la matrice completa associata al sistema:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & -1 \\ h & h-1 & 1 & -1 \\ -h & 1 & 1 & h-5 \end{array}\right) \overset{\text{riducendo}}{\longmapsto} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 2h \\ 0 & 0 & 0 & 2h^2+3h \end{array}\right).$$

Dunque, per $h \neq 0, -\frac{3}{2}$ il sistema è impossibile.

Sia $h = 0$. allora la matrice ridotta diventa:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

e il sistema associato è:

$$\begin{cases} x+y-z = 1 \\ x+y = -2 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -2 \\ z = -3. \end{cases}$$

Dunque per $h = 0$ l'unica soluzione è $(0, -2, -3)$.

Sia $h = -\frac{3}{2}$. allora la matrice ridotta diventa:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 1 \\ 1 & 1 & 0 & | & -2 \\ 1 & 0 & 0 & | & -3 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

e il sistema associato è:

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ x + y = -2 \\ x = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 1 \\ z = -3. \end{cases}$$

Dunque per $h = 0$ l'unica soluzione è $(-3, 1, -3)$.

B

Sono dati i vettori $v_1 = (1, 1, 1, 1)$, $v_2 = (1, 1, 1, 0)$, $v_3 = (1, 1, 0, 0)$ e la base $\mathscr{A} = [v_1, v_2, v_3]$ di $V = \mathscr{L}(v_1, v_2, v_3)$ e, inoltre, sono dati $w_1 = (1, -1, 1, -1)$, $w_2 = (0, 1, -1, 1)$ e $w_3 = (0, 1, -1, 0)$ e la base $\mathscr{B} = [w_1, w_2, w_3]$ di $W = \mathscr{L}(w_1, w_2, w_3)$. È assegnata l'applicazione lineare $f\colon V \to W$ definita da:

$$\begin{aligned} f(v_1) &= w_1 + 2w_2 + w_3 \\ f(v_2) &= w_2 + hw_3 \\ f(v_3) &= w_2 + w_3, \end{aligned}$$

al variare di $h \in \mathbb{R}$.

1) Studiare f al variare di $h \in \mathbb{R}$.
2) Dato $w = w_1 + w_2 + w_3$, calcolare $f^{-1}(w) = \{v \in V \mid f(v) = w\}$, al variare di $h \in \mathbb{R}$.
3) Dato, al variare di $h \in \mathbb{R}$, l'endomorfismo $g\colon V \to V$ tale che:

$$\begin{aligned} g(v_1) &= v_1 - v_3 \\ g(v_2) &= hv_2 + v_3 \\ g(v_3) &= -v_3, \end{aligned}$$

studiare la semplicità di g al variare di $h \in \mathbb{R}$. Determinare, se possibile, una base di autovettori nel caso $h = 2$.

Soluzione

1) È chiaro che:

$$M^{\mathscr{A},\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & h & 1 \end{pmatrix}.$$

Essendo $|M^{\mathscr{A},\mathscr{B}}(f)| = 1 - h$, per $h \neq 1$ abbiamo che f è un isomorfismo, cioè f è iniettiva, per cui $\operatorname{Ker} f = \{(0, 0, 0, 0)\}$, e f è suriettiva, per cui $\operatorname{Im} f = W$.

Sia $h = 1$. In tal caso:

$$M^{\mathscr{A},\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xmapsto{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque, $\dim \operatorname{Im} f = \rho(M^{\mathscr{A},\mathscr{B}}(f)) = 2$ e una base di $\operatorname{Im} f$ è:

$$[w_1 + 2w_2 + w_3, w_2 + w_3] = [(1, 2, -2, 1), (0, 2, -2, 1)].$$

Inoltre, $\dim \operatorname{Ker} f = 3 - \dim \operatorname{Im} f = 1$ e:

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker} f = \{v \in V \mid [v]_{\mathscr{A}} = (a, b, c),\ a = 0,\ b + c = 0\} = \mathscr{L}((0, 1, -1)_{\mathscr{A}}) = \\ = \mathscr{L}(v_2 - v_3) = \mathscr{L}((0, 0, 1, 0)). \end{aligned}$$

2) Per calcolare la controimmagine occorre risolvere il sistema la cui matrice completa associata è:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & h & 1 & 1 \end{array}\right) \overset{\text{riducendo}}{\longmapsto} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & h-1 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Sia $h \neq 1$. In tal caso, il sistema ammette una sola soluzione:

$$\begin{cases} a = 1 \\ b + c = -1 \\ (h-1)b = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = \frac{1}{h-1} \\ c = -\frac{h}{h-1}. \end{cases}$$

Dunque:

$$f^{-1}(w) = \left\{ v_1 + \frac{1}{h-1} v_2 - \frac{h}{h-1} v_3 \right\} = \left\{ \left(0, 0, \frac{h}{h-1}, 1 \right) \right\}.$$

Sia $h = 1$. In tal caso il sistema è impossibile, per cui $f^{-1}(w) = \emptyset$.

3) Dato che:

$$M^{\mathscr{A}}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & h & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

allora:

$$P(T) = \begin{vmatrix} 1-T & 0 & 0 \\ 0 & h-T & 0 \\ -1 & 1 & -1-T \end{vmatrix} = (1-T)(h-T)(-1-T).$$

Dunque, per $h \neq 1, -1$ gli autovalori sono 1, h, -1, ognuno di molteplicità algebrica 1, per cui g è semplice.

Sia $h = 1$. In tal caso, gli autovalori sono 1 e -1, con $m_1 = 2$ e $m_{-1} = 1$. Sappiamo che $1 \leq \dim V_{-1} \leq m_{-1} = 1$, per cui $\dim V_{-1} = m_{-1} = 1$, e $1 \leq dim V_1 \leq m_1 = 2$. Quindi, g è semplice se $\dim V_1 = m_1 = 2$. Inoltre, $V_1 = \operatorname{Ker} g_1$, dove $g_1 = g - i$ e:

$$M^{\mathscr{A}}(g_1) = M^{\mathscr{A}}(g) - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Dunque, $\rho = 1$ e $\dim V_1 = 3 - 1 = 2 = m_1$. Questo vuol dire che per $h = 1$ g è semplice.

Sia $h = -1$. In tal caso, gli autovalori sono 1 e -1, con $m_1 = 1$ e $m_{-1} = 2$. Sappiamo che $1 \leq \dim V_1 \leq m_1 = 1$, per cui $\dim V_1 = m_1 = 1$, e $1 \leq dim V_{-1} \leq m_{-1} = 2$. Quindi, g è semplice se $\dim V_{-1} = m_{-1} = 2$. Inoltre, $V_{-1} = \operatorname{Ker} g_{-1}$, dove $g_{-1} = g + i$ e:

$$M^{\mathscr{A}}(g_{-1}) = M^{\mathscr{A}}(g) + I = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque, $\rho = 2$ e $\dim V_{-1} = 3 - 2 = 1 < 2 = m_{-1}$. Questo vuol dire che per $h = -1$ g non è semplice.

Sia $h = 2$. In questo caso gli autovalori sono 1, -1 e 2, tutti con molteplicità algebrica 1. Cerchiamo una base di autovettori.

Sia $T = 1$. Allora $V_1 = \ker g_1$, dove $g_1 = g - i$ e:

$$M^{\mathscr{A}}(g_1) = M^{\mathscr{A}}(g) - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Dunque:

$$V_1 = \{v \in V \mid [v]_{\mathscr{A}} = (a,b,c),\ b = 0,\ -a+b-2c = 0\} = \mathscr{L}((-2,0,1)_{\mathscr{A}}) =$$
$$= \mathscr{L}(-2v_1 + v_3) = \mathscr{L}((-1,-1,2,2)).$$

Sia $T = -1$. Allora $V_{-1} = \ker g_{-1}$, dove $g_{-1} = g + i$ e:

$$M^{\mathscr{A}}(g_{-1}) = M^{\mathscr{A}}(g) + I = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xmapsto{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque:

$$V_{-1} = \{v \in V \mid [v]_{\mathscr{A}} = (a,b,c),\ 2a = 0,\ 3b = 0\} = \mathscr{L}((0,0,1)_{\mathscr{A}}) = \mathscr{L}(v_3) = \mathscr{L}((1,1,0,0)).$$

Sia $T = 2$. Allora $V_2 = \ker g_2$, dove $g_2 = g - 2i$ e:

$$M^{\mathscr{A}}(g_2) = M^{\mathscr{A}}(g) - 2I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \xmapsto{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Dunque:

$$V_2 = \{v \in V \mid [v]_{\mathscr{A}} = (a,b,c),\ -a = 0,\ b-3c = 0\} = \mathscr{L}((0,3,1)_{\mathscr{A}}) =$$
$$= \mathscr{L}(3v_2 + v_3) = \mathscr{L}((4,4,3,0)).$$

Quindi, una base di autovettori per g è $[(-1,-1,2,2),(1,1,0,0),(4,4,3,0)]$.