CdL in Ingegneria Informatica (P-Z) - Ingegneria Elettronica (P-Z)

Prova in itinere di **Geometria**, corso di **Algebra lineare e Geometria** - 13 Giugno 2015

Durata della prova: due ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti. Compito A

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1) Sono dati il punto $A = (1,1,0)$, le rette

$$r\colon \begin{cases} x+y-2z-1=0 \\ 2x+y+z+2=0 \end{cases} \quad \text{e} \quad s\colon \begin{cases} x+y=0 \\ 2x-z=0 \end{cases}$$

e il piano $\pi\colon 2x-z-1=0$.

(a) Dato il punto improprio P_∞ della retta r, determinare la retta AP_∞.
(b) Determinare la retta t passante per A, perpendicolare a r e parallela a π.
(c) Determinare la proiezione ortogonale di A su s.
(d) Calcolare la distanza $d(s,\pi)$ di s dal piano π.

2) Studiare, nel piano $z=0$, il fascio di coniche di equazione:

$$x^2+2hxy+4y^2-2h-5=0,$$

determinando, in particolare, punti base e coniche spezzate.

3) Scrivere l'equazione del fascio di coniche del piano $z=0$ tangenti in $A=(1,0)$ alla retta $2x-y-2=0$ e in $B=(-1,0)$ alla retta $x+1=0$.

4) Classificare, al variare di $h \in \mathbb{R}$, le quadriche di equazione:

$$x^2+2xy+2xz+2y^2+hz^2+2z-1=0.$$

Soluzione

1) (a) Parametri direttori della retta r sono:

$$\left(\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \right) = (3,-5,-1).$$

Dunque, il punto improprio di r è $P_\infty = (3,-5,-1,0)$ e la retta cercata ha equazioni:

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{-5} = \frac{z}{-1} \Rightarrow \begin{cases} x+3z-1=0 \\ y-5z-1=0. \end{cases}$$

(b) Se (l,m,n) sono parametri direttori di t, allora deve essere:

$$\begin{cases} 3l-5m-n=0 \\ 2l-n=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n=10m \\ l=5m, \end{cases}$$

per cui parametri direttori di t sono $(5,1,10)$ e la retta cercata ha equazioni:

$$t\colon \frac{x-1}{5} = y-1 = \frac{z}{10} \Rightarrow \begin{cases} x-5y+4=0 \\ 10y-z-10=0. \end{cases}$$

(c) Sia α il piano passante per A e perpendicolare a s. Dato che parametri direttori di s sono $(1, -1, 2)$, allora:

$$\alpha\colon (x-1) - (y-1) + 2z = 0 \Rightarrow x - y + 2z = 0.$$

La proiezione ortogonale di A su s è il punto intersezione di α con s:

$$\alpha \cap s\colon \begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ x + y = 0 \\ 2x - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0. \end{cases}$$

Dunque, la proiezione ortogonale di A su s è il punto $(0, 0, 0)$.

(d) Dal momento che il piano $2x - z = 0$ contiene la retta s e dal momento che esso è parallelo al piano π, concludiamo che s e π sono paralleli. Scelto, allora, il punto $O = (0, 0, 0) \in s$, vediamo che:

$$d(s, \pi) = d(O, \pi) = \frac{|-1|}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

2) Cominciamo con l'osservare che l'equazione del fascio può essere scritta nella forma $x^2 + 4y^2 - 5 + 2h(xy - 1) = 0$, per cui la conica nascosta è l'iperbole equilatera $xy - 1 = 0$.

La matrice associata al fascio di coniche è:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & h & 0 \\ h & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2h-5 \end{pmatrix} \Rightarrow |B| = (-2h - 5)(4 - h^2).$$

Quindi, le coniche spezzate del fascio si ottengono per $h = 2, -2, -\frac{5}{2}$. Per $h = 2$ la conica spezzata è:

$$x^2 + 4xy + 4y^2 - 9 = 0 \Rightarrow (x + 2y + 3)(x + 2y - 3) = 0.$$

Per $h = -2$ la conica spezzata è:

$$x^2 - 4xy + 4y^2 - 1 = 0 \Rightarrow (x - 2y + 1)(x - 2y - 1) = 0.$$

Per $h = -\frac{5}{2}$ la conica spezzata è:

$$x^2 - 5xy + 4y^2 = 0 \Rightarrow (x - y)(x - 4y) = 0.$$

Troviamo i punti base intersecando due delle coniche spezzate del fascio:

$$\begin{cases} (x - y)(x - 4y) = 0 \\ (x - 2y + 1)(x - 2y - 1) = 0, \end{cases}$$

da cui si ottiene che i punti base sono $(1, 1)$, $(-1, -1)$, $(-2, -\frac{1}{2})$ e $(2, \frac{1}{2})$.

Da:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & h \\ h & 4 \end{vmatrix} = 4 - h^2,$$

otteniamo che per $-2 < h < 2$ abbiamo delle ellissi (tutte reali) , nessuna delle quali è una circonferenza, per $h < -2$, $h \neq -\frac{5}{2}$, e $h > 2$ abbiamo delle iperboli. Per nessun valore di h otteniamo delle iperboli equilatere, per cui l'unica iperbole equilatera del fascio è quella nascosta. Non ci sono parabole nel fascio, perché per $h = \pm 2$ abbiamo delle coniche spezzate.

3) Il fascio di coniche cercato ha equazione:

$$\lambda(2x - y - 2)(x + 1) + \mu y^2 = 0.$$

4) Le matrici associate alle quadriche sono:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & h & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & h \end{pmatrix},$$

da cui si ottiene che $|B| = 1 - h$ e $|A| = h - 2$. Quindi, per $h = 1$ abbiamo un cono e per $h = 2$ abbiamo un paraboloide ellittico. Da:

$$P_A(T) = \begin{vmatrix} 1-T & 1 & 1 \\ 1 & 2-T & 0 \\ 1 & 0 & h-T \end{vmatrix} = -T^3 + (h+3)T^2 - 3hT + h - 2,$$

vediamo che abbiamo degli ellissoidi per $h > 2$, per cui per $h > 2$ abbiamo degli ellissoidi reali, per $1 < h < 2$ abbiamo degli iperboloidi ellittici e per $h < 1$ abbiamo degli iperboloidi iperbolici.