CdL in Ingegneria Informatica - Ingegneria Elettronica (P-Z) -Ingegneria REA

Prova scritta di **Algebra lineare e Geometria**- 3 Febbraio 2015

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.

I

È assegnato l'endomorfismo $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definita da:

$$\begin{aligned} f(1,1,0,1) &= (k+2, 1, -k-1, k) \\ f(1,0,1,1) &= (k+2, 1, -k-1, 0) \\ f(0,0,1,1) &= (k+1, 1, -k-1, 0) \\ f(0,0,0,1) &= (k, 0, -k, 0). \end{aligned}$$

1) Studiare f, al variare di $k \in \mathbb{R}$, determinando $\operatorname{Ker} f$ e $\operatorname{Im} f$.

2) Nel caso in cui f non è un isomorfismo dire se esso è semplice.

3) Calcolare $f^{-1}(1,1,1,1)$, al variare di $k \in \mathbb{R}$.

4) Dato $V = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y+z=0\}$, verificare che la restrizione di f a V induce un endomorfismo $\varphi\colon V \to V$ per ogni $k \in \mathbb{R}$.

5) Verificare che φ non è semplice per alcun valore di $k \in \mathbb{R}$.

Soluzione

1) Con dei semplici calcoli si ottiene che:

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & k \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -k \\ 0 & k & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque, $|M(f)| = -k^2$, per cui per $k \neq 0$ f è un isomorfismo, $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^4$ e $\operatorname{Ker} f = \{(0,0,0,0)\}$. Invece, per $k = 0$ abbiamo:

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xmapsto{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi, in tal caso si ha $\dim \operatorname{Im} f = \rho(M(f)) = 2$. Inoltre, $\operatorname{Im} f = \mathscr{L}((1,0,0,0),(1,1,-1,0))$ e $\operatorname{Ker} f = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y+z = y+z = 0\}$.

2) Per $k = 0$ il polinomio caratteristico è:

$$P(t) = \begin{vmatrix} 1-T & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1-T & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1-T & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -T \end{vmatrix} = -T^3(1-T).$$

Dunque, gli autovalori sono 0 e 1, con $m_0 = 3$ e $m_1 = 1$. Tuttavia $V_0 = \operatorname{Ker} f$ e abbiamo visto che $\dim \operatorname{Ker} f = 2 < 3 = m_0$, per cui concludiamo che per $k = 0$ f non è semplice.

3) Per calcolare $f^{-1}(1,1,1,1)$ occorre risolvere il sistema:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & k & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -k & 1 \\ 0 & k & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xmapsto{R_2 \leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & k & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -k & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & k & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Quindi, per $k \neq 0$ è possibile calcolare la controimmagine:

$$\begin{cases} x+y+z+kt=1 \\ -y-z-kt=1 \\ y+z=1 \\ ky=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=\frac{1}{k} \\ z=\frac{k-1}{k} \\ t=-\frac{2}{k}. \end{cases} \Rightarrow f^{-1}(1,1,1,1) = \left\{ \left(2, \frac{1}{k}, \frac{k-1}{k}, -\frac{2}{k}\right) \right\}.$$

Per $k=0$ abbiamo:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right),$$

da cui deduciamo immediatamente che il sistema è impossibile e che, in tal caso, $f^{-1}(1,1,1,1) = \emptyset$.

4) Si vede facilmente che $V = \mathscr{L}((1,0,-1,0),(0,1,-1,0),(0,0,0,1))$ e che:

$$f(V) = \mathscr{L}(f(1,0,-1,0), f(0,1,-1,0), f(0,0,0,1)) = \mathscr{L}((0,-1,1,0),(0,0,0,k),(k,0,-k,0)).$$

Inoltre, $(0,-1,1,0),(0,0,0,k),(k,0,-k,0) \in V$, in quanto soddisfano l'equazione cartesiana di V per ogni $k \in \mathbb{R}$. Dunque, $f(V) \subseteq V$, il che implica che che la restrizione di f a V induce un endomorfismo $\varphi\colon V \to V$ per ogni $k \in \mathbb{R}$.

5) Siano $v_1 = (1,0,-1,0)$, $v_2 = (0,1,-1,0)$, $v_3 = (0,0,0,1)$ e $\mathscr{A} = [v_1, v_2, v_3]$ una base di V. Allora:

$$\begin{aligned} \varphi(v_1) &= f(v_1) = (0,-1,1,0) = -v_2 \\ \varphi(v_2) &= f(v_2) = (0,0,0,k) = kv_3 \\ \varphi(v_3) &= f(v_3) = (k,0,-k,0) = kv_1. \end{aligned}$$

Quindi:

$$M^{\mathscr{A}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & k \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow P(T) = \begin{vmatrix} -T & 0 & k \\ -1 & -T & 0 \\ 0 & k & -T \end{vmatrix} = -T^3 + k^2.$$

Questo vuol dire che $P(T)$ ha un solo autovalore reale per ogni $k \neq 0$. Quindi, φ non è certamente semplice per $k \neq 0$. Per $k=0$ l'unico autovalore è 0 con molteplicità 3, ma in tal caso si ha anche che $\rho(M^{\mathscr{A}}(\varphi)) = 1$, per cui $\dim V_0 = \dim \operatorname{Ker} \varphi = 2 < m_0 = 3$. Questo vuol dire che φ non è semplice per alcun valore di k.

II

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1) Sono dati il punto $A = (-1,1,1)$, la retta $r\colon x+3z-4 = y+2z-4 = 0$ e il piano $\pi\colon x+y-z-1=0$. Determinare la retta s passante per A, parallela al piano π e perpendicolare alla retta r. Verificare che r e s sono sghembe e determinare la distanza tra r e s.

2) Studiare il fascio di coniche del piano $z=0$ di equazione:

$$hx^2 + hy^2 + 2xy + 2x + 2hy = 0,$$

determinandone, in particolare, i suoi punti base e le coniche spezzate.

3) Studiare, al variare di $k \in \mathbb{R}$, le quadriche di equazione:

$$xy + (k+2)xz + (3-k)yz + 6z^2 + 4kz + 4 = 0.$$

Soluzione

1) Parametri direttori della retta r sono $(3, 2, -1)$ e componenti di un vettore perpendicolare a π sono $(1, 1, -1)$, per cui dei parametri direttori (l, m, n) della retta s sono tali che:

$$\begin{cases} 3l + 2m - n = 0 \\ l + m - n = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = -2l \\ n = -l. \end{cases}$$

Quindi, parametri direttori di s sono $(1, -2, -1)$ e abbiamo:

$$s\colon x + 1 = \frac{y-1}{-2} = -(z-1) \Rightarrow s\colon \begin{cases} x + z = 0 \\ 2x + y + 1 = 0. \end{cases}$$

Una semplice verifica mostra che le rette sono sghembe. Infatti:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \end{vmatrix} = 6 \neq 0.$$

Troviamo il piano π' contenente r e parallelo a s. I piani contenenti r hanno equazione:

$$\lambda(x + 3z - 4) + \mu(y + 2z - 4) = 0.$$

Affinché il piano sia parallelo a r deve accadere $-2\lambda - 4\mu = 0$, da cui ricaviamo che $\pi'\colon 2x - y + 4z - 4 = 0$. A questo punto concludiamo:

$$d(r, s) = d(A, \pi') = \frac{3}{\sqrt{21}}.$$

2) Le matrici associate al fascio di coniche sono:

$$B = \begin{pmatrix} h & 1 & 1 \\ 1 & h & h \\ 1 & h & 0 \end{pmatrix} \text{ e } A = \begin{pmatrix} h & 1 \\ 1 & h \end{pmatrix}.$$

Dal momento che $|B| = -h(h^2 - 1)$, le coniche spezzate si ottengono per $h = 0$, $h = 1$ e $h = -1$. Per $h = 0$ abbiamo la conica $x(y + 1) = 0$; per $h = 1$ abbiamo $(x + y)(x + y + 2) = 0$; per $h = -1$ abbiamo $(x - y)(x - y - 2) = 0$. I punti base sono $(0, 0)$, $(0, -2)$, $(1, -1)$ e $(-1, -1)$. La conica nascosta ha equazione $x^2 + y^2 + 2y = 0$: essa è una circonferenza reale di centro $(0, -1)$ e raggio 1.

Dal fatto che $|A| = h^2 - 1$ deduciamo che per $h < -1$ e $h > 1$ abbiamo delle ellissi. L'unica circonferenza del fascio è quella che si ottiene per $h = \infty$. Per $-1 < h < 1$, $h \neq 0$, abbiamo delle iperboli, nessuna delle quali è equilatera. Per $h \pm 1$ non abbiamo parabole perché per quei valori le coniche sono spezzate.

3) Le matrici associate alle quadriche sono:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{k+2}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{3-k}{2} & 0 \\ \frac{k+2}{2} & \frac{3-k}{2} & 6 & 2k \\ 0 & 0 & 2k & 4 \end{pmatrix} \text{ e } A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{k+2}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{3-k}{2} \\ \frac{k+2}{2} & \frac{3-k}{2} & 6 \end{pmatrix}.$$

Si ha $|B| = k$ e $|A| = \frac{-k^2+k}{4}$. Per $k = 0$ si ha $|B| = |A| = 0$ e $\rho(B) = 3$, per cui per questo valore abbiamo un cilindro. Per $k = 1$ si ha $|B| = 1 > 0$ e $|A| = 0$, per cui abbiamo un paraboloide iperbolico. Per $k \neq 0, 1$ abbiamo $|B|, |A| \neq 0$. Inoltre:

$$P(T) = -T^3 + 6T^2 + \frac{1}{2}(k^2 - k + 7)T + \frac{-k^2 + k}{4}.$$

Essendo $k^2 - k + 7 > 0$ per ogni $k \in \mathbb{R}$, non ci sono mai ellissoidi. Quindi, per $k > 0$, $k \neq 1$, abbiamo degli iperboloidi iperbolici e per $k < 0$ abbiamo degli iperboloidi ellittici.