CdL in Ingegneria Informatica - Ingegneria Elettronica (P-Z)
Ingegneria REA - Ingegneria Industriale (F-O)
Ingegneria Gestionale - Ingegneria Meccanica - Ingegneria Elettrica

Prova scritta di **Algebra lineare e Geometria**- 29 Settembre 2015

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.

I

È assegnato l'endomorfismo $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che:

$$\begin{aligned} f(1,1,1) &= (h, 2-h, 2-2h) \\ f(0,1,1) &= (0, 1-h, 1-h) \\ f(0,0,1) &= (1,1,0), \end{aligned}$$

al variare di $h \in \mathbb{R}$.

1. Studiare f, al variare di $h \in \mathbb{R}$, determinando $\operatorname{Ker} f$ e $\operatorname{Im} f$.
2. Studiare la semplicità di f al variare di $h \in \mathbb{R}$.
3. Calcolare, al variare di $h \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(0, 1, -h-1)$.
4. Dato $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0\}$, mostrare che la restrizione $f|_V$ induce un endomorfismo $g\colon V \to V$ per ogni $h \in \mathbb{R}$. Studiare la semplicità di g, determinando una base di autovettori indipendente dal parametro.

Soluzione

1. Si ottiene facilmente che:

$$M(f) = \begin{pmatrix} h & -1 & 1 \\ 1 & -h & 1 \\ 1-h & 1-h & 0 \end{pmatrix}.$$

Dal momento che $|M(f)| = 0$ per ogni $h \in \mathbb{R}$, per studiare f riduciamo la matrice:

$$M(f) = \begin{pmatrix} h & -1 & 1 \\ 1 & -h & 1 \\ 1-h & 1-h & 0 \end{pmatrix} \overset{\text{riducendo}}{\longmapsto} \begin{pmatrix} h & -1 & 1 \\ 1-h & 1-h & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi, per $h \neq 1$ abbiamo $\rho(M(f)) = 2$ e per $h = 1$ abbiamo $\rho(M(f)) = 1$.

Sia $h \neq 1$. Dunque, $\dim \operatorname{Im} f = \rho(M(f)) = 2$ e una sua base è $[(h,1,1-h),(1,1,0)]$. Inoltre, $\dim \operatorname{Ker} f = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \operatorname{Im} f = 1$ e:

$$\operatorname{Ker} f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid hx - y + z = 0,\ (1-h)x + (1-h)y = 0\} = \mathscr{L}((1,-1,-h-1)).$$

Sia $h = 1$. Dunque, $\dim \operatorname{Im} f = \rho(M(f)) = 1$ e $\operatorname{Im} f = \mathscr{L}((1,1,0))$. Inoltre, $\dim \operatorname{Ker} f = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \operatorname{Im} f = 2$ e:

$$\operatorname{Ker} f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0\}.$$

2. Si vede che:

$$P(T) = \begin{vmatrix} h-T & -1 & 1 \\ 1 & -h-T & 1 \\ 1-h & 1-h & -T \end{vmatrix} = -T(h-1-T)(1-h-T).$$

Dunque, gli autovalori sono 0, $h-1$ e $1-h$. Essi sono tutti distinti per $h \neq 1$, per cui per $h \neq 1$ f è certamente semplice. Per $h = 1$ l'unico autovalore è 0 con $m_0 = 3$. Essendo $V_0 = \operatorname{Ker} f$, per lo studio fatto prima sappiamo che $\dim V_0 = \dim \operatorname{Ker} f = 2 < 3 = m_0$. Questo vuol dire che per $h = 0$ f non è semplice.

3. Per calcolare $f^{-1}(0,1,-h-1)$ occorre risolvere il sistema:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} h & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -h & 1 & 1 \\ 1-h & 1-h & 0 & -h-1 \end{array}\right) \xmapsto{\text{riducendo}} \left(\begin{array}{ccc|c} h & -1 & 1 & 0 \\ 1-h & 1-h & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -h-2 \end{array}\right).$$

Per $h \neq 1$, la matrice ottenuta è ridotta. In particolare, per $h \neq 1, -2$ abbiamo $\rho(A) = 2 \neq \rho(A|B) = 3$. Questo vuol dire che per $h \neq 1, -2$ $f^{-1}(0,1,-h-1) = \emptyset$.

Sia $h = 1$. In tal caso, abbiamo:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right) \xmapsto{\text{riducendo}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Dunque, anche per $h = 1$ il sistema è impossibile e $f^{-1}(0,1,-h-1) = f^{-1}(0,1,-2) = \emptyset$.

Sia $h = -2$. In tal caso:

$$\begin{aligned} f^{-1}(0,1,-h-1) = f^{-1}(0,1,1) &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid -2x - y + z = 0,\ 3x + 3y = 1\} = \\ &= \{(x, -x + \tfrac{1}{3}, x + \tfrac{1}{3}) \in \mathbb{R}^3\}. \end{aligned}$$

4. Dal momento che $V = \mathscr{L}((1,1,0),(0,1,1))$, si ha $f(V) = \mathscr{L}(f(1,1,0), f(0,1,1))$. Essendo, $f(1,1,0) = (h-1, 1-h, 2-2h) \in V$ e $f(0,1,1) = (0, 1-h, 1-h) \in V$ per ogni $h \in \mathbb{R}$, in quanto verificano la sua equazione cartesiana, concludiamo subito che $f(V) \subseteq V$, per cui f induce un endomorfismo $g \colon V \to V$.

Sia $\mathcal{B} = [(1,1,0),(0,1,1)]$ la base di V considerata. Dal momento che:

$$\begin{aligned} [f(1,1,0)]_{\mathcal{B}} &= [(h-1, 1-h, 2-2h)]_{\mathscr{B}} = (h-1, 2-2h) \\ [f(0,1,1)]_{\mathcal{B}} &= [(0, 1-h, 1-h)]_{\mathscr{B}} = (0, 1-h), \end{aligned}$$

abbiamo che:

$$M^{\mathscr{B}}(g) = \begin{pmatrix} h-1 & 0 \\ 2-2h & 1-h \end{pmatrix}.$$

Essendo $P(T) = (h-1-T)(1-h-T)$, vediamo che gli autovalori sono $h-1$ e $1-h$. Essi sono distinti per $h \neq 1$. Cerchiamo una base di autovettori in questo caso.

Sia $T = h-1$. Allora $V_{h-1} = \operatorname{Ker} g_{h-1}$, dove $g_{h-1} = g - (h-1)i$ e:

$$M^{\mathscr{B}}(g_{h-1}) = M^{\mathscr{B}}(g) - (h-1)I = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2-2h & 2-2h \end{pmatrix},$$

per cui:

$$V_{h-1} = \{v \in V \mid [v]_{\mathscr{B}} = (a,b),\ (2-2h)a + (2-2h)b = 0\} = \mathscr{L}((1,1,0)-(0,1,1)) = \mathscr{L}((1,0,-1)).$$

Sia $T = 1-h$. Essendo $f(0,1,1) = (0, 1-h, 1-h) = (1-h)\cdot(0,1,1)$, $(0,1,1) \in V_{1-h}$ e, dovendo essere $\dim V_{1-h} = 1$, abbiamo che $V_{1-h} = \mathscr{L}((0,1,1))$. Dunque, possiamo concludere che una base di autovettori indipendente dal parametro è $[(1,0,-1),(0,1,1)]$ ed essa sarà una base di autovettori anche per $h = 1$, per cui g è sempre semplice.

II

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1. Date le rette:
$$r\colon \begin{cases} x+y-2z=1 \\ 2x-y+z=-1 \end{cases} \quad \text{e} \quad s\colon \begin{cases} x+z=0 \\ y-z=1, \end{cases}$$
determinare la retta t passante per il punto $P=(1,-2,1)$ e ortogonale a entrambe le rette.

2. Determinare e studiare il fascio di coniche del piano $z=0$ tangenti alla retta $t_1\colon x-y=0$ nel punto $A=(-3,-3)$ e alla retta $t_2\colon x+y=0$ nel punto $B=(-1,1)$.

3. Determinare l'equazione del cono di vertice $V=(0,1,-1)$ contenente la seguente conica:
$$\Gamma\colon \begin{cases} x^2-y^2-2x=0 \\ z=0. \end{cases}$$

Soluzione

1. Parametri direttori delle due rette sono $(1,5,3)$ e $(1,-1,-1)$. La retta t ha parametri direttori (l,m,n) dove:
$$\begin{cases} l+5m+3n=0 \\ l-m-n=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=-2l \\ n=3l. \end{cases}$$
Dunque, parametri direttori di t sono $(1,-2,3)$ e la retta cercata ha equazioni:
$$t\colon x-1=\frac{y+2}{-2}=\frac{z-1}{3} \Rightarrow t\colon \begin{cases} 2x+y=0 \\ 3x-z-2=0. \end{cases}$$

2. Essendo $AB\colon 2x-y+3=0$, il fascio di coniche cercato ha equazione:
$$h(x-y)(x+y)+(2x-y+3)^2=0 \Rightarrow (h+4)x^2-4xy+(1-h)y^2+12x-6y+9=0.$$
Le uniche coniche spezzate del fascio sono le due utilizzate per scrivere la sua equazione, per cui si può certamente dire che $|B|=0$ se e solo se $h=0$. Possiamo, dunque, direttamente passare alla classificazione delle coniche del fascio:
$$|A|=\begin{vmatrix} h+4 & -2 \\ -2 & 1-h \end{vmatrix}=-h^2-3h.$$
Quindi, per $-3<h<0$ abbiamo delle ellissi, tutte reali, perché i punti base del fascio sono reali, ma nessuna di queste è una circonferenza. Per $h=-3$ abbiamo una parabola, mentre per $h=0$ abbiamo una conica spezzata. Per $h<-3$ e $h>0$ abbiamo delle iperboli, nessuna delle quali è equilatera, perché $\mathrm{Tr}(A)=5$ per ogni $h\in\mathbb{R}$.

3. Il generico punto $P\in\Gamma$ ha coordinate $P=(\alpha,\beta,0)$, dove $\alpha^2-\beta^2-2\alpha=0$. La retta PV ha equazione:
$$\frac{x}{\alpha}=\frac{y-1}{\beta-1}=z+1,$$
da cui otteniamo:
$$\begin{cases} \alpha=\dfrac{x}{z+1} \\ \beta=\dfrac{y+z}{z+1}. \end{cases}$$
Sostituendo in $\alpha^2-\beta^2-2\alpha=0$ otteniamo:
$$\frac{x^2}{(z+1)^2}-\frac{(y+z)^2}{(z+1)^2}-2\frac{x}{z+1}=0 \Rightarrow x^2-(y+z)^2-2x(z+1)=0.$$
Quindi, l'equazione del cono è $x^2-y^2-z^2-2xz-2yz-2x=0$.