CdL in Ingegneria Informatica - Ingegneria Elettronica (P-Z) -Ingegneria REA

Prova scritta di **Algebra lineare e Geometria**- 24 Febbraio 2015

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.

I

Sia $V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 |\ y - t = 0\}$ e sia $f\colon V \to V$ l'endomorfismo di V definito dalla matrice

$$M^{\mathcal{A}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & h+2 & 0 \\ h & h+3 & -3 \\ 2 & -h & 0 \end{pmatrix} \quad \text{al variare di } h \in \mathbb{R}$$

dove $\mathcal{A} = [(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 1), (0, 0, 1, 0)]$.

1) Studiare l'endomorfismo f al variare di h determinando in ogni caso $\operatorname{Ker} f$ e $\operatorname{Im} f$.

2) Nel caso $h = -1$ studiare la semplicità di f.

3) Sia $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'endomorfismo la cui restrizione a V induce f e tale che $\varphi(0, 0, 0, 1) = (0, 0, 0, 1)$. Determinare la matrice $A = M(\varphi)$ associata a φ rispetto alla base canonica.

4) Studiare l'endomorfismo φ al variare di $h \in \mathbb{R}$.

II

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O.\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}.u$.

1) Determinare il luogo delle rette s passanti per $P = (2, 1, 0)$ che formano con la retta

$$r : \begin{cases} x + y + 2 = 0 \\ z = -3 \end{cases}$$

un angolo di $\frac{\pi}{4}$.

2) Determinare e studiare il fascio di coniche del piano $z = 0$ tangenti alla retta t : $x + y = 0$ nel punto $O = (0, 0)$ e passanti per $A = (-1, -1)$ e per $B = (-1, 0)$. Detta c la circonferenza del fascio, determinare la retta tangente a c nel punto $C = (0, -1)$.

3) Studiare il fascio Φ di quadriche di equazione

$$\Phi : hx^2 - y^2 - 2z^2 + 2xz - 4z + h = 0$$

SVOLGIMENTO, I

1) Siano $v_1 = (1,0,0,0)$, $v_2 = (0,1,0,1)$ e $v_3 = (0,0,1,0)$. La matrice associata ad f rispetto alla base $\mathcal{A}$ ha determinante:
$$|M^{\mathcal{A}}(f)| = -12(h+1).$$
Quindi f è un isomorfismo per $h \neq -1$; consideriamo il caso particolare:
$$h = -1: \quad \mathrm{Im}\, f = \mathscr{L}((1,0,1)_{\mathcal{A}}, (0,1,0)_{\mathcal{A}}) = \mathscr{L}(v_1 + v_3, v_2) = \mathscr{L}((1,0,1,0), (0,1,0,1));$$
$$\mathrm{Ker}\, f = \mathscr{L}((3,-6,-5)_{\mathcal{A}}) = \mathscr{L}(3v_1 - 6v_2 - 5v_3) = \mathscr{L}((3,-6,-5,-6)).$$

2) Si ricava facilmente il polinomio caratteristico di f, $P(T) = -T^3 + 4T^2 - 8T$, con radici non tutte reali $T = 0,\ 2 \pm 2i$, quindi f non è semplice.

3) L'endomorfismo φ è definito dalle relazioni:
$$\begin{cases} \varphi(1,0,0,0) = 2v_1 + hv_2 + 2v_3 = (2,h,2,h) \\ \varphi(0,1,0,1) = (h+2)v_1 + (h+3)v_2 - hv_3 = (h+2, h+3, -h, h+3) \\ \varphi(0,0,1,0) = -3v_2 = (0,-3,0,-3) \\ \varphi(0,0,0,1) = (0,0,0,1) \end{cases}$$
da cui si ricava con facili calcoli la matrice $M(\varphi)$ associata a φ rispetto alla base canonica:
$$M(\varphi) = \begin{pmatrix} 2 & h+2 & 0 & 0 \\ h & h+3 & -3 & 0 \\ 2 & -h & 0 & 0 \\ h & h+2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{con } |M(\varphi)| = -12(h+1).$$

4) Analogamente a quanto fatto per f, si ha che φ è un isomorfismo per $h \neq -1$; consideriamo il caso particolare $h = -1$:
$$\mathrm{Im}\, \varphi = \mathscr{L}((1,0,1,0), (0,1,0,0), (0,0,0,1))$$
$$\mathrm{Ker}\, \varphi = \mathscr{L}((3,-6,-5,-6)).$$

II

1) La retta r ha numeri direttori $(1,-1,0)$; indicando con (l,m,n) i numeri direttori delle rette ß avremo le equazioni
$$s: \begin{cases} x = 2 + lt \\ y = 1 + mt \\ z = nt \end{cases}$$
I vettori (l,m,n) e $(1,-1,0)$ devono formare un angolo di $\frac{\pi}{4}$, dunque deve essere:
$$\pm \frac{l - m}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
e quadrando otteniamo:
$$\frac{l^2 + m^2 - 2lm}{2(l^2 + m^2 + n^2)} = \frac{1}{2}$$
da cui $2lm + n^2 = 0$.

Dalle equazioni della retta ricaviamo:
$$\begin{cases} l = \frac{x-2}{t} \\ m = \frac{y-1}{t} \\ n = \frac{z}{t} \end{cases}$$
e, sostituendo, otteniamo il cono luogo delle rette s:
$$2xy + z^2 - 2x - 4y + 4 = 0$$

2) Le coniche spezzate del fascio sono solo due e precisamente sono la conica spezzata nell'unione delle rette t e AB e la conica spezzata nell'unione delle retta OA e $0B$.

Dunque, il nostro fascio di coniche ha equazione:

$$\phi : \ (x+y)(x+1) + hy(x-y) = 0$$

La matrice associata alla generica conica del fascio è

$$B = \begin{pmatrix} 1 & \frac{h+1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{h+1}{2} & -h & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Dal momento che conosciamo già le coniche spezzate del fascio (che si trovano per $h = 0, \infty$), caratterizziamo le coniche irriducibili usando $|A| = -\frac{h^2+6h+1}{4}$. Avremo:

- $|A| > 0, \ -3-2\sqrt{2} < h < -3+2\sqrt{2}$: ELLISSI. Per $h = -1$ si ha la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 + x + y = 0$;
- $|A| < 0, \ h < -3-2\sqrt{2}, h > -3+2\sqrt{2}$: IPERBOLI. Per $h = 1$ si ha l'iperbole equilatera $x^2 - y^2 + 2xy + x + y = 0$;
- $|A| = 0, \ h = -3 \pm 2\sqrt{2}$: PARABOLE.

L'equazione della retta tangente alla circonferenza nel punto $C \equiv (0,-1)$ é data dal prodotto

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad x - y - 1 = 0\,.$$

3) Dalla matrice associata alla generica quadrica del fascio si ha

$$B = \begin{pmatrix} h & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & h \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} |B| = 2h^2 + 5h \\ \\ |A| = 2h + 1 \end{array}$$

quindi $|B| = 0$ per $h = 0, -\frac{5}{2}$ e $|A| = 0$ per $h = -\frac{1}{2}$. Consideriamo i casi particolari:

- $h = 0$, si ha il cono $y^2 + z^2 - 2xz + 4z = 0$ di vertice $(2,0,0)$;
- $h = -\frac{5}{2}$, si ha il cono $5x^2 + 2y^2 + 4z^2 - 4xz + 8z + 5 = 0$ di vertice $(-\frac{1}{2}, 0, -\frac{5}{4})$;
- $h = -\frac{1}{2}$, si ha il paraboloide ellittico (in quanto $|B| < 0$) $x^2 + 2y^2 + 4z^2 - 4xz + 8z + 1 = 0$.

Per gli altri valori di h si avranno ellissoidi o iperboloidi. Osserviamo $|B| > 0$ per $h < -\frac{5}{2}, h > 0$. Dal polinomio caratteristico della sottomatrice A:

$$P(T) = (1+T)(-T^2 + (h-2)T + 2h + 1)$$

si vede che gli autovalori sono concordi (negativi) per $h \leq -\frac{1}{2}$. Usando il segno di $|B|$ avremo:

- $h < -\frac{5}{2}$: autovalori concordi, $|B| > 0$, ELLISSOIDI IMMAGINARI;
- $-\frac{5}{2} < h < -\frac{1}{2}$: autovalori concordi, $|B| < 0$, ELLISSOIDI REALI;
- $-\frac{1}{2} < h < 0$: autovalori discordi, $|B| < 0$, IPERBOLOIDI ELLITTICI;
- $h > 0$: autovalori discordi, $|B| > 0$, IPERBOLOIDI IPERBOLICI.