CdL in Ingegneria Informatica - Ingegneria Elettronica (P-Z) -Ingegneria REA

Prova scritta di **Algebra lineare e Geometria**- 22 Giugno 2015

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.

I

Sia $V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - z + t = 0\}$ e sia $f \colon V \to V$ l'endomorfismo di V definito dalle condizioni:

$$\begin{aligned} f(1,1,2,1) &= (k-1, k-1, 2k-2, k-1) \\ f(1,-1,2,1) &= (1-k, k-1, 2-2k, 1-k) \\ f(0,0,1,1) &= (-1,-1,0,1) \end{aligned}$$

al variare di $k \in \mathbb{R}$.

1. Studiare l'endomorfismo f al variare di k, determinando in ogni caso $\operatorname{Ker} f$ e $\operatorname{Im} f$.
2. Studiare la semplicità di f, al variare di $k \in \mathbb{R}$, determinando, se possibile, una base di autovettori.
3. Calcolare, al variare di $k \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(k-1, k-1, 2k-2, k-1)$.
4. Per $k \neq 1$ determinare l'endomorfismo $\varphi \colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che la restrizione $\varphi|_V$ induce f e $\ker \varphi = \mathscr{L}((1,0,0,0))$.

Soluzione

1. Detta $\mathscr{A} = [(1,2,1,1), (1,-1,2,1), (0,0,1,1)]$ la base di V assegnata, è semplice vedere che, preso $(x, y, z, t) \in V$, si ha:
$$[(x,y,z,t)]_{\mathscr{A}} = (\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2}, -2x+z).$$
Dunque, si ottiene:
$$M^{\mathscr{A}}(f) = \begin{pmatrix} k-1 & 0 & -1 \\ 0 & 1-k & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$
per cui per $k \neq 1$ $\rho(M^{\mathscr{A}}(f)) = 3$, cioè f è un isomorfismo. Perciò, è iniettiva e suriettiva e $\operatorname{Im} f = V$ e $\operatorname{Ker} f = \{(0,0,0)\}$.
Sia $k = 1$. In tal caso si ha:
$$M^{\mathscr{A}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$
per cui $\rho(M^{\mathscr{A}}(f)) = 1$. Dunque, $\dim \operatorname{Im} f = 1$ e:
$$\operatorname{Im} f = \mathscr{L}(-1(1,1,2,1) + 2(0,0,1,1)) = \mathscr{L}((-1,-1,0,1)).$$
Inoltre, $\dim \operatorname{Ker} f = 2$ e $\operatorname{Ker} f = \mathscr{L}((1,1,2,1), (1,-1,2,1))$.

2. Dal momento che:

$$P(T) = \begin{vmatrix} k-1-T & 0 & -1 \\ 0 & 1-k-T & 0 \\ 0 & 0 & 2-T \end{vmatrix} = (k-1-T)(1-k-T)(2-T),$$

vediamo che per gli autovalori sono $k-1$, $1-k$ e 2, per cui per $k \neq 1, -1, 3$ f è certamente semplice. Cerchiamo una base di autovettori in questo caso.

Stiamo supponendo, dunque, $k \neq 1, -1, 3$. Sia $T = 2$. Si ha $V_2 = \operatorname{Ker} f_2$, dove $f_2 = f - 2i$ e:

$$M^{\mathscr{A}}(f_2) = M^{\mathscr{A}}(f) - 2I = \begin{pmatrix} k-3 & 0 & -1 \\ 0 & -1-k & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque:

$$V_2 = \{v \in V \mid [v]_{\mathscr{A}} = (a,b,c),\ (k-3)a - c = 0,\ (-1-k)b = 0\} =$$
$$= \mathscr{L}((1,1,2,1) + (k-3)(0,0,1,1)) = \mathscr{L}((1,1,k-1,k-2)).$$

Sia $T = k-1$. Si ha $V_{k-1} = \operatorname{Ker} f_{k-1}$, dove $f_{k-1} = f - (k-1)i$ e:

$$M^{\mathscr{A}}(f_{k-1}) = M^{\mathscr{A}}(f) - (k-1)I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2-k & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Dunque:

$$V_{k-1} = \{v \in V \mid [v]_{\mathscr{A}} = (a,b,c),\ b = 0,\ c = 0\} = \mathscr{L}((1,1,2,1)).$$

Sia $T = 1-k$. Si ha $V_{1-k} = \operatorname{Ker} f_{1-k}$, dove $f_{1-k} = f - (1-k)i$ e:

$$M^{\mathscr{A}}(f_{1-k}) = M^{\mathscr{A}}(f) - (1-k)I = \begin{pmatrix} 2k-2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Dunque:

$$V_{1-k} = \{v \in V \mid [v]_{\mathscr{A}} = (a,b,c),\ (2k-2)a - c = 0,\ 2c = 0\} = \mathscr{L}((1,-1,2,1)).$$

Dunque, per $k \neq 1, -1, 3$ una base di autovettori è $[(1,1,k-1,k-2), (1,-1,2,1), (1,1,2,1)]$.

Sia $k = 1$. In tal caso, gli autovalori sono 0 e 2, con $m_0 = 2$ e $m_2 = 1$. Sappiamo che $V_0 = \operatorname{Ker} f = \mathscr{L}((1,1,2,1),(1,-1,2,1))$, per cui certamente f è semplice per $k = 1$.

Sia $T = 2$. Si ha $V_2 = \operatorname{Ker} f_2$, dove $f_2 = f - 2i$ e:

$$M^{\mathscr{A}}(f_2) = M^{\mathscr{A}}(f) - 2I = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque:

$$V_2 = \{v \in V \mid [v]_{\mathscr{A}} = (a,b,c),\ -2a - c = 0,\ -2b = 0\} =$$
$$= \mathscr{L}((1,1,2,1) - 2(0,0,1,1)) = \mathscr{L}((1,1,0,-1)).$$

Quindi, per $k = 1$ una base di autovettori è $[(1,1,0,-1), (1,-1,2,1), (1,1,2,1)]$.

Sia $k = -1$. In tal caso gli autovalori sono -2 e 2, con $m_2 = 2$ e $m_{-2} = 1$.

Sia $T = 2$. Si ha $V_2 = \operatorname{Ker} f_2$, dove $f_2 = f - 2i$ e:

$$M^{\mathscr{A}}(f_2) = M^{\mathscr{A}}(f) - 2I = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque, $\dim V_2 = m_2 = 2$ e f è semplice per $k = -1$. Inoltre:

$$\begin{aligned} V_2 = \{v \in V \mid [v]_{\mathscr{A}} = (a,b,c),\ -4a - c = 0\} = \\ = \mathscr{L}((1,1,2,1) - 4(0,0,1,1), (1,-1,2,1)) = \mathscr{L}((1,1,-2,-3), (1,-1,2,1)). \end{aligned}$$

Sia $T = -2$. Si ha $V_{-2} = \operatorname{Ker} f_{-2}$, dove $f_{-2} = f + 2i$ e:

$$M^{\mathscr{A}}(f_{-2}) = M^{\mathscr{A}}(f) + 2I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Dunque:

$$V_{-2} = \{v \in V \mid [v]_{\mathscr{A}} = (a,b,c),\ b = 0,\ c = 0\} = \mathscr{L}((1,1,2,1)$$

Quindi, per $k = -1$ una base di autovettori è $[(1,1,2,1), (1,1,-2,-3), (1,-1,2,1)]$.

Sia $k = 3$. In tal caso gli autovalori sono -2 e 2, con $m_2 = 2$ e $m_{-2} = 1$.

Sia $T = 2$. Si ha $V_2 = \operatorname{Ker} f_2$, dove $f_2 = f - 2i$ e:

$$M^{\mathscr{A}}(f_2) = M^{\mathscr{A}}(f) - 2I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque, $\dim V_2 = 1 < m_2 = 2$ e f non è semplice per $k = 3$, per cui in questo caso non esiste una base di autovettori.

3. Sappiamo che $f(1,1,2,1) = (k-1, k-1, 2k-2, k-1)$ e che per $k \neq 1$ f è un isomorfismo. Quindi, possiamo dire che per $k \neq 1$ si ha:

$$f^{-1}(k-1, k-1, 2k-2, k-1) = \{(1,1,2,1)\}.$$

Per $k = 1$ si ha:

$$f^{-1}(k-1, k-1, 2k-2, k-1) = f^{-1}(0,0,0,0) = \operatorname{Ker} f = \mathscr{L}((1,1,2,1), (1,-1,2,1)).$$

4. Dal momento che $(1,0,0,0) \notin V$ i vettori $(1,1,2,1)$,$(1,-1,2,1)$, $(0,0,1,1)$ e $(1,0,0,0)$ individuano una base di $\mathbb{R}^4$, per cui φ è perfettamente determinata dalle condizioni:

$$\begin{aligned} \varphi(1,1,2,1) &= (k-1, k-1, 2k-2, k-1) \\ \varphi(1,-1,2,1) &= (1-k, k-1, 2-2k, 1-k) \\ \varphi(0,0,1,1) &= (-1,-1,0,1) \\ \varphi(1,0,0,0) &= (0,0,0,0). \end{aligned}$$

II

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O.\vec{x},\vec{y},\vec{z}.u$.

1. Data la retta

$$r\colon \begin{cases} x - z = 0 \\ y + z - 1 = 0, \end{cases}$$

determinare la sua proiezione ortogonale sul piano $z = 0$.

2. Determinare e studiare il fascio di coniche del piano $z = 0$ tangenti agli assi $\vec{x}$ e $\vec{y}$ nei punti in cui essi secano la retta $s\colon\ x + y - 1 = 0$.

3. Classificare le quadriche contenenti la conica:

$$\Gamma\colon\ \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ z(x - z) = 0 \end{cases}$$

e tangenti al piano improprio nel punto improprio dell'asse $\vec{y}$.

Soluzione

1. La retta cercata è l'intersezione del piano contenente r e perpendicolare a $z = 0$ con lo stesso piano $z = 0$. I piani contenenti r hanno equazione:

$$\lambda(x - z) + \mu(y + z - 1) = 0 \Rightarrow \lambda x + \mu y + (-\lambda + \mu)z - \mu = 0.$$

Questo piano è perpendicolare a $z = 0$ se sono perpendicolare i vettori di componenti $(\lambda, \mu, -\lambda + \mu)$ e $(0, 0, 1)$, per cui deve essere $\lambda = \mu$ e il piano cercato ha equazione $x + y - 1 = 0$. Questo vuol dire che la proiezione ortogonale è la retta:

$$\begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ z = 0. \end{cases}$$

2. Il fascio di coniche cercato ha equazione:

$$hxy + (x + y - 1)^2 = 0 \Rightarrow x^2 + (h + 2)xy + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0.$$

Sappiamo già che le coniche del fascio sono irriducibili per $h \neq 0$. Inoltre, da:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & \frac{h+2}{2} \\ \frac{h+2}{2} & 1 \end{vmatrix} = 1 - \frac{(h + 2)^2}{4} = \frac{-h^2 - 4h}{4}.$$

Quindi, per $-4 < h < 0$ abbiamo delle ellissi e, in particolare, per $h = -2$ abbiamo una circonferenza. Per $h = 0$ abbiamo una conica spezzata, mentre per $h = -4$ abbiamo una parabola. Per $h < -4$ e $h > 0$ abbiamo delle iperboli, nessuna delle quali è equilatera.

3. Le quadriche contenenti la conica assegnata hanno equazione:

$$\begin{aligned} &z(x - z) + (x + y - 1)(ax + by + cz + d) = 0 \Rightarrow \\ &\qquad \Rightarrow ax^2 + by^2 - z^2 + (c + 1)xz + (a + b)xy + cyz + (d - a)x + (d - b)y - cz - d = 0. \end{aligned}$$

L'asse $\vec{y}$ ha equazioni $x = z = 0$ e il suo punto improprio è $(0, 1, 0, 0)$. Il piano tangente alle quadriche in questo punto è:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & \dfrac{a+b}{2} & \dfrac{c+1}{2} & \dfrac{d-a}{2} \\ \dfrac{a+b}{2} & b & \dfrac{c}{2} & \dfrac{d-b}{2} \\ \dfrac{c+1}{2} & \dfrac{c}{2} & -1 & -\dfrac{c}{2} \\ \dfrac{d-a}{2} & \dfrac{d-b}{2} & -\dfrac{c}{2} & -d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{a+b}{2}x + by + \frac{c}{2} + \frac{d-b}{2}t = 0,$$

Questo piano tangente coincide con il piano improprio se:

$$\begin{cases} \dfrac{a+b}{2} = 0 \\ b = 0 \\ \dfrac{c}{2} = 0 \\ \dfrac{d-b}{2} \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \\ d \neq 0. \end{cases}$$

Dunque, le quadriche cercate hanno equazione $xz - z^2 + dx + dy - d = 0$, con $d \neq 0$. Queste quadriche contengono una conica spezzata in due rette reali e distinte e hanno necessariamente la C_∞ spezzata, la quale, obbligatoriamente, sarà a sua volta spezzata in due rette reali e distinte. Questo vuol dire che queste quadriche sono tutti paraboloidi iperbolici. Infatti, si ha:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{d}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{d}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -1 & 0 \\ \frac{d}{2} & -\frac{d}{2} & 0 & -d \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

con $|B| = \frac{d^2}{16} > 0$ e $|A| = 0$.