# CdL in Ingegneria Informatica - Ingegneria Elettronica (P-Z)
# Ingegneria REA - Ingegneria Industriale (F-O)
# Ingegneria Gestionale - Ingegneria Meccanica - Ingegneria Elettrica
# Ingegneria Civile e Ambientale (M-Z)

Prova scritta di **Algebra lineare e Geometria**- 21 Novembre 2015

---

*Durata della prova: tre ore.*
*È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.*
*Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.*
*È vietato consultare libri o appunti.*

---

**I**

È assegnato l'endomorfismo $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che:

$$M(f) = \begin{pmatrix} h-1 & 1 & h & 0 \\ 0 & h+1 & 1-h & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -h \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

al variare di $h \in \mathbb{R}$.

1. Studiare $f$, al variare di $h \in \mathbb{R}$, determinando $\operatorname{Ker} f$ e $\operatorname{Im} f$.
2. Studiare la semplicità di $f$ al variare di $h \in \mathbb{R}$.
3. Dato l'endomorfismo $g\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che $g(x,y,z,t) = (-hx+t, -y, -y-z+t, -y)$, sia $\varphi = f+g$. Assegnato $V = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x-y+z-t = 0\}$, calcolare $\varphi^{-1}(V)$ al variare di $h \in \mathbb{R}$, determinando il valore di $h$ per il quale $\varphi^{-1}(V) = \mathscr{L}((0,1,0,0),(3,0,1,0),(0,3,0,2))$.
4. Nel caso $h = 1$ calcolare $\operatorname{Ker}\varphi \cap \operatorname{Im}\varphi$ e $\operatorname{Ker}\varphi + \operatorname{Im}\varphi$, specificando, in particolare, se la somma è diretta o meno.

Soluzione

1. Dal momento che $|M(f)| = -2h(h-1)$, si può subito affermare che per $h \neq 0,1$ $f$ è un isomorfismo, per cui $f$ è iniettiva e suriettiva, $\operatorname{Ker} f = \{(0,0,0,0)\}$ e $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^4$.
Sia $h = 0$. In tal caso:
$$M(f) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \overset{\text{riducendo}}{\longmapsto} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
Dunque, $\dim \operatorname{Im} f = \rho(M(f)) = 3$ e una base di $\operatorname{Im} f$ è $[(-1,0,0,0),(1,1,1,0),(0,1,0,-1)]$. Inoltre, $\dim \operatorname{Ker} f = \dim \mathbb{R}^4 - \dim \operatorname{Im} f = 1$ e:
$$\operatorname{Ker} f = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid -x+y = 0,\ y+z+t = 0,\ y+z = 0\} = \mathscr{L}((1,1,-1,0)).$$
Sia $h = 1$. In tal caso:
$$M(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \overset{\text{riducendo}}{\longmapsto} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque, $\dim \operatorname{Im} f = \rho(M(f)) = 3$ e una base di $\operatorname{Im} f$ è $[(1,2,1,0),(1,0,1,0),(0,1,-1,-1)]$. Inoltre, $\dim \operatorname{Ker} f = \dim \mathbb{R}^4 - \dim \operatorname{Im} f = 1$ e:

$$\operatorname{Ker} f = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid y+z=0,\ 2y+t=0,\ -t=0\} = \mathscr{L}((1,0,0,0)).$$

2. Si vede facilmente che:

$$P(T) = \begin{vmatrix} h-1-T & 1 & h & 0 \\ 0 & h+1-T & 1-h & 1 \\ 0 & 1 & 1-T & -h \\ 0 & 0 & 0 & -1-T \end{vmatrix} = (h-1-T)(-1-T)(h-T)(2-T),$$

per cui gli autovalori sono $h-1$, $-1$, $h$ e 2. Essi sono a due a due distinti per $h \neq 0,3,-1,2$ e per tali valori possiamo, perciò, affermare che $f$ è semplice.

Sia $h=0$. In tal caso, abbiamo $m_{-1}=2$, $m_0=1$ e $m_2=1$. Sappiamo che $\dim V_0 = m_0 = 1$ e $\dim V_2 = m_2 = 1$, mentre $1 \leq dim V_{-1} \leq m_{-1} = 2$. Dunque, $f$ è semplice se $\dim V_{-1} = m_{-1} = 2$. Sappiamo che $V_{-1} = \operatorname{Ker} f_{-1}$, dove $f_{-1} = f + i$ e:

$$M(f_{-1}) = M(f) + I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{\text{riducendo}}{\longmapsto} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque $\rho(M(f_{-1})) = 3$ e $\dim V_{-1} = 4 - \rho(M(f_{-1})) = 1 < 2 = m_{-1}$. Quindi, $f$ non è semplice per $h=0$.

Sia $h=3$. In tal caso, abbiamo $m_2=2$, $m_{-1}=1$ e $m_3=1$. Sappiamo che $\dim V_{-1} = m_{-1} = 1$ e $\dim V_3 = m_3 = 1$, mentre $1 \leq dim V_2 \leq m_2 = 2$. Dunque, $f$ è semplice se $\dim V_2 = m_2 = 2$. Sappiamo che $V_2 = \operatorname{Ker} f_2$, dove $f_2 = f - 2i$ e:

$$M(f_2) = M(f) - 2I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \overset{\text{riducendo}}{\longmapsto} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & -28 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque $\rho(M(f_2)) = 3$ e $\dim V_2 = 4 - \rho(M(f_2)) = 1 < 2 = m_2$. Quindi, $f$ non è semplice per $h=3$.

Sia $h=-1$. In tal caso, abbiamo $m_{-1}=2$, $m_{-2}=1$ e $m_2=1$. Sappiamo che $\dim V_{-2} = m_{-2} = 1$ e $\dim V_2 = m_2 = 1$, mentre $1 \leq dim V_{-1} \leq m_{-1} = 2$. Dunque, $f$ è semplice se $\dim V_{-1} = m_{-1} = 2$. Sappiamo che $V_{-1} = \operatorname{Ker} f_{-1}$, dove $f_{-1} = f + i$ e:

$$M(f_{-1}) = M(f) + I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{\text{riducendo}}{\longmapsto} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque $\rho(M(f_{-1})) = 2$ e $\dim V_{-1} = 4 - \rho(M(f_{-1})) = 2 = m_{-1}$. Quindi, $f$ è semplice per $h=-1$.

Sia $h=2$. In tal caso, abbiamo $m_2=2$, $m_{-1}=1$ e $m_1=1$. Sappiamo che $\dim V_{-1} = m_{-1} = 1$ e $\dim V_1 = m_1 = 1$, mentre $1 \leq dim V_2 \leq m_2 = 2$. Dunque, $f$ è semplice se $\dim V_2 = m_2 = 2$. Sappiamo che $V_2 = \operatorname{Ker} f_2$, dove $f_2 = f - 2i$ e:

$$M(f_2) = M(f) - 2I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \overset{\text{riducendo}}{\longmapsto} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque $\rho(M(f_2)) = 3$ e $\dim V_2 = 4 - \rho(M(f_2)) = 1 < 2 = m_2$. Quindi, $f$ non è semplice per $h=2$.

3. Si vede facilmente che:

$$M(\varphi) = M(f) + M(g) = \begin{pmatrix} h-1 & 1 & h & 0 \\ 0 & h+1 & 1-h & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -h \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -h & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} -1 & 1 & h & 1 \\ 0 & h & 1-h & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1-h \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Quindi:

$$\varphi(x,y,z,t) = (-x+y+hz+t, hy+(1-h)z+t, (1-h)t, -y-t)$$

per ogni $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$ e:

$$f^{-1}(V) = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid \varphi(x,y,z,t) \in V\} =$$
$$= \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid -x+(2-h)y+(2h-1)z+(2-h)t = 0\}.$$

Dunque, $\dim f^{-1}(V) = 3$ per ogni $h \in \mathbb{R}$.

Osserviamo che i vettori $(0,1,0,0), (3,0,2,0), (0,3,0,2)$ sono linearmente indipendenti per cui lo spazio $\mathscr{L}((0,1,0,0),(3,0,2,0),(0,3,0,2))$ ha dimensione 3. Inoltre:

$$(0,1,0,0) \in f^{-1}(V) \Leftrightarrow h = 2$$
$$(3,0,1,0) \in f^{-1}(V) \Leftrightarrow h = 2$$
$$(0,3,0,2) \in f^{-1}(V) \Leftrightarrow h = 2.$$

Quindi, per $h = 2$ $\mathscr{L}((0,1,0,0),(3,0,2,0),(0,3,0,2)) \subseteq f^{-1}(V)$, ma entrambi gli spazi hanno dimensione 3, per cui possiamo concludere che per $h = 2$ $\mathscr{L}((0,1,0,0),(3,0,2,0),(0,3,0,2)) = f^{-1}(V)$.

4. Sia $h = 1$. In tal caso:

$$M(\varphi) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xmapsto{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque, è chiaro che $\dim \operatorname{Im} \varphi = \rho(M(\varphi)) = 2$ e che una base di $\operatorname{Im} \varphi$ è $[(1,0,0,0),(1,1,0,-1)]$. Inoltre, $\dim \operatorname{Ker} \varphi = 2$ e:

$$\operatorname{Ker} \varphi = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid -x+y+z+t = 0,\ y+t = 0\} = \mathscr{L}((1,0,1,0),(0,1,0,-1)).$$

Possiamo anche trovare le equazioni cartesiane di $\operatorname{Im} \varphi$:

$$\operatorname{Im} \varphi = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid y+t = 0,\ z = 0\},$$

per cui:

$$\operatorname{Ker} \varphi \cap \operatorname{Im} \varphi = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid -x+y+z+t = 0,\ y+t = 0,\ z = 0\} = \mathscr{L}((0,1,0,-1)).$$

Dal momento che $\operatorname{Ker} \varphi \cap \operatorname{Im} \varphi \neq \{(0,0,0,0)\}$, possiamo subito concludere che la somma non è diretta:

$$\operatorname{Ker} \varphi + \operatorname{Im} \varphi = \mathscr{L}((1,0,1,0),(0,1,0,-1)) + \mathscr{L}((1,0,0,0),(1,1,0,-1)) =$$
$$= \mathscr{L}((1,0,1,0),(0,1,0,-1),(1,0,0,0)).$$

Per la precisione possiamo dire che $\dim(\operatorname{Ker} \varphi + \operatorname{Im} \varphi) = 3$ e che una sua base è:

$$[(1,0,1,0),(0,1,0,-1),(1,0,0,0)].$$

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1. Dati la retta:
$$r\colon \begin{cases} x - y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$
e il piano $\pi\colon 2x - 2y + 3z - 1 = 0$, mostrare che $r$ e $\pi$ sono paralleli e determinare la proiezione ortogonale di $r$ su $\pi$.

2. Studiare il fascio di coniche del piano $z = 0$ di equazione:
$$hx^2 + hy^2 - 2xy - h = 0,$$
determinando, in particolare, i punti base e le coniche spezzate. Determinare e classificare la conica del fascio tangente alla retta $2x - y - 2 = 0$ nel punto $(1, 0)$.

3. Studiare le quadriche di equazione:
$$x^2 + y^2 + kz^2 - 2yz + 4x - 1 = 0,$$
al variare di $k \in \mathbb{R}$.

Soluzione

1. La retta $r$ ha parametri direttori $(1, 1, 0)$, mentre il vettore di componenti $(2, -2, 3)$ è perpendicolare al piano $\pi$. Una semplice verifica mostra che retta e piano sono paralleli tra loro. Cerchiamo il piano $\pi_1$ contenente $r$ e perpendicolare a $\pi$. I piani contenenti $r$ hanno equazione $\lambda x - \lambda y + \mu z = 0$. Il vettore di componenti $(\lambda, -\lambda, \mu)$ deve essere perpendicolare al vettore di componenti $(2, -2, 3)$, per cui deve essere $4\lambda + 3\mu = 0$. Prendendo $\lambda = 3$ e $\mu = -4$ troviamo che $\pi_1\colon 3x - 3y - 4z = 0$ e la proiezione di $r$ sul piano $\pi$ è la retta:
$$\pi \cap \pi_1\colon \begin{cases} 3x - 3y - 4z = 0 \\ 2x - 2y + 3z - 1 = 0. \end{cases}$$

2. Dei semplici calcoli mostrano che $|B| = -h(h^2 - 1)$ e $|A| = h^2 - 1$. Quindi, le coniche spezzate si hanno per $h = 0, 1, -1$ e hanno equazioni, rispettivamente, $xy = 0$, $(x - y + 1)(x - y - 1) = 0$ e $(x + y + 1)(x + y - 1) = 0$. I punti base sono i punti $(1, 0)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$ e $(0, -1)$. Inoltre, la conica nascosta ha equazione $x^2 + y^2 - 1 = 0$, cioè è la circonferenza di centro l'origine e raggio 1. Per $-1 < h < 1$, $h \neq 0$, abbiamo che $|A| < 0$ e $|B| \neq 0$, per cui per questi valori abbiamo delle iperboli, nessuna delle quali è equilatera. Per $h < -1$ e $h > 1$ abbiamo che $|A| > 0$ e $|B| \neq 0$, per cui per questi valori abbiamo delle ellissi. L'unica circonferenza del fascio è quella nascosta, mentre non ci sono parabole nel fascio, perché per $h = \pm 1$ abbiamo delle coniche spezzate.

   Cerchiamo la retta tangente alle coniche el fascio nel punto $(1, 0)$, che è un punto base:
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h & -1 & 0 \\ -1 & h & 0 \\ 0 & 0 & -h \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow hx - y - h = 0.$$
   Questa retta coincide con la retta $2x - y - 2 = 0$ solo per $h = 2$ e per tale valore abbiamo un'ellisse.

3. Si vede facilmente che $|B| = -5(k - 1)$ e che $|A| = k - 1$. Per $k = 1$ abbiamo $|B| = |A| = 0$ e si vede che $\rho(B) = 3$, per cui per tale valore abbiamo un cilindro.

   Sia $k \neq 1$. In tal caso abbiamo $|B|, |A| \neq 0$. Inoltre:
$$P_A(T) = -T^3 + (k + 2)T^2 - 2kT + k - 1.$$
   Analizzando i coefficienti di $P_A(T)$ vediamo che per $k > 1$ abbiamo degli ellissoidi e, dal momento che in tal caso abbiamo $|B| < 0$, questi ellissoidi saranno tutti reali. Per $k < 1$ abbiamo degli iperboloidi e, dal momento che in tal caso abbiamo $|B| > 0$, questi iperboloidi saranno tutti iperbolici.