CdL in Ingegneria Informatica - Ingegneria Elettronica (P-Z)
Ingegneria REA - Ingegneria Industriale (F-O)

Prova scritta di **Algebra lineare e Geometria**- 17 Aprile 2015

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.

I

È assegnato l'endomorfismo $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la cui matrice associata rispetto alla base canonica è:

$$M(f) = \begin{pmatrix} 2-h & 3-h & 2h-2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1-h & 1-h & 2h-1 \end{pmatrix}.$$

1) Studiare f, al variare di $h \in \mathbb{R}$, determinando $\operatorname{Ker} f$ e $\operatorname{Im} f$ e le loro equazioni cartesiane.
2) Data $\mathscr{A} = [(1,1,1),(1,0,1),(0,-1,-1)]$, determinare $M^{\mathscr{A}}(f)$.
3) Studiare la semplicità di f al variare di $h \in \mathbb{R}$, determinando una base di autovettori indipendente dal parametro.
4) Dato $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y-z=0\}$, determinare $f(V)$ al variare di $h \in \mathbb{R}$, specificandone in ciascun caso la dimensione.

Soluzione

1) Dal momento che $|M(f)| = -h$, per $h \neq 0$ f è un isomorfismo, per cui $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^3$ e $\operatorname{Ker} f = \{(0,0,0)\}$.
Per $h = 0$ si ha:
$$M(f) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \overset{\text{riducendo}}{\longmapsto} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
Dunque, $\dim \operatorname{Im} f = \rho(M(f)) = 2$ e $\operatorname{Im} f = \mathscr{L}((2,0,1),(3,-1,1))$. Inoltre, da:
$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ x & y & z \end{vmatrix} = x+y-2z,$$
otteniamo che $\operatorname{Im} f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y-2z=0\}$. Poi, $\dim \operatorname{Ker} f = 3 - \dim \operatorname{Im} f = 1$ e:
$$\operatorname{Ker} f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x-3y-2z = -y = 0\} = \mathscr{L}((1,0,1)).$$
2) Da:
$$\begin{pmatrix} 2-h & 3-h & 2h-2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1-h & 1-h & 2h-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 2-h & 3-h & 2h-2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1-h & 1-h & 2h-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h \\ 0 \\ h \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2-h & 3-h & 2h-2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1-h & 1-h & 2h-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -h-1 \\ 1 \\ h \end{pmatrix},$$

otteniamo che $f(1,1,1) = (3,-1,1)$, $f(1,0,1) = (h,0,h)$ e $f(0,-1,-1) = (-h-1,1,-h)$. Inoltre, da:

$$(x,y,z) = a(1,1,1) + b(1,0,1) + c(0,-1,-1) \Rightarrow \begin{cases} a+b=x \\ a-c=y \\ a+b-c=z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=x+y-z \\ b=-y+z \\ c=x-z \end{cases}$$

otteniamo $[(x,y,z)]_{\mathscr{A}} = (x+y-z, -y+z, x-z)$. Quindi:

$$\begin{aligned} &[f(1,1,1)]_{\mathscr{A}} = [(3,-1,1)]_{\mathscr{A}} = (1,2,2) \\ &[f(1,0,1)]_{\mathscr{A}} = [(h,0,h)]_{\mathscr{A}} = (0,h,0) \\ &[f(0,-1,-1)]_{\mathscr{A}} = [(-h-1,1,-h)]_{\mathscr{A}} = (0,-h-1,-1). \end{aligned}$$

Questo vuol dire che:

$$M^{\mathscr{A}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & h & -h-1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

3) Da:

$$P(T) = \begin{vmatrix} 1-T & 0 & 0 \\ 2 & h-T & -h-1 \\ 2 & 0 & -1-T \end{vmatrix} = (1-T)(h-T)(-1-T)$$

vediamo che gli autovalori sono 1, -1 e h. Dunque, per $h \neq \pm 1$ f è certamente semplice. Cerchiamo una base di autovetture in questo caso.

Sia $T=1$. Allora $V_1 = \operatorname{Ker} g_1$ e:

$$M^{\mathscr{A}}(g_1) = M^{\mathscr{A}}(f) - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & h-1 & -h-1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Dunque, $\dim V_1 = 1$ (come sappiamo già) e:

$$\begin{aligned} V_1 = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid [v]_{\mathscr{A}} = (a,b,c),\ 2a + (h-1)b + (-h-1)c = 0,\ 2a-2c=0\} = \\ = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid [v]_{\mathscr{A}} = (a,a,a)\} = \mathscr{L}((1,1,1)+(1,0,1)+(0,-1,-1)) = \mathscr{L}((2,0,1)). \end{aligned}$$

Sia $T=-1$. Allora $V_{-1} = \operatorname{Ker} g_{-1}$ e:

$$M^{\mathscr{A}}(g_{-1}) = M^{\mathscr{A}}(f) + I = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & h+1 & -h-1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & h+1 & -h-1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dunque, $\dim V_{-1} = 1$ (come sappiamo già) e:

$$\begin{aligned} V_{-1} = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid [v]_{\mathscr{A}} = (a,b,c),\ 2a=0,\ (h+1)b + (-h-1)c = 0,\} = \\ = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid [v]_{\mathscr{A}} = (0,b,b)\} = \mathscr{L}((1,0,1)+(0,-1,-1)) = \mathscr{L}((1,-1,0)). \end{aligned}$$

Sia $T=h$. Sappiamo già che $\dim V_h = m_h = 1$ e sappiamo che $f(1,0,1) = (h,0,h) = h \cdot (1,0,1)$. Questo vuol dire che $(1,0,1) \in V_h$ e, dunque, che $V_h = \mathscr{L}((1,0,1))$.

Quindi, per $h \neq \pm 1$ una base di autovettori è $[(2,0,1),(1,-1,0),(1,0,1)]$. Dal momento che essa è indipendente dal parametro h, essa è una base di autovettori anche per $h=1$ e $h=-1$ ed è la base di autovettori indipendente dal parametro cercata.

4) Dato che $V = \{(x,y,x+y) \in \mathbb{R}^3\} = \mathscr{L}((1,0,1),(0,1,1))$, si ha $f(V) = \mathscr{L}(f(1,0,1), f(0,1,1)) = \mathscr{L}((h,0,h),(h+1,-1,h))$. Dal momento che la matrice:

$$\begin{pmatrix} h+1 & -1 & h \\ h & 0 & h \end{pmatrix}$$

ha rango 2 per $h \neq 0$ e rango 1 per $h = 0$, concludiamo che per $h \neq 0$ $\dim f(V) = 2$ e per $h = 0$ $\dim f(V) = 1$.

II

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1) Date le rette $r\colon x-1 = y+z = 0$ e $s\colon y = x-z+1 = 0$, mostrare che esse sono sghembe e determinare la retta incidente entrambe le rette date e passante per il punto $P = (0,1,-1)$.

2) Date le rette $p\colon x-1 = 0$ e $q\colon x+y = 0$ e dati i punti $A = (1,0)$ e $B = (\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$ del piano $z = 0$, determinare e studiare il fascio di coniche tangenti alla retta p in A e alla retta q in B.

3) Studiare, al variare di $h \in \mathbb{R}$, le quadriche di equazione:

$$x^2 + 2hxz + y^2 + 2z - 1 = 0.$$

Soluzione

1) Dal momento che:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0,$$

le due rette sono sghembe. Cerchiamo il piano π_1 contenente la retta r e passante per P:

$$\lambda(x-1) + \mu(y+z) = 0 \Rightarrow -\lambda = 0.$$

Dunque, $\pi_1\colon y+z = 0$. Cerchiamo il piano π_2 contenente la retta s e passante per P:

$$\lambda y + \mu(x-z+1) = 0 \Rightarrow \lambda + 2\mu = 0.$$

Dunque, $\pi_2\colon x - 2y - z + 1 = 0$. Quindi, la retta cercata è $\pi_1 \cap \pi_2$:

$$\begin{cases} y + z = 0 \\ x - 2y - z + 1 = 0. \end{cases}$$

2) La retta AB ha equazione $x - 2y - 1 = 0$. Quindi, il fascio cercato ha equazione:

$$h(x-1)(x+y) + (x-2y-1)^2 = 0 \Rightarrow (h+1)x^2 + 4y^2 + (h-4)xy + (-h-2)x + (-h+4)y = 0.$$

Le coniche spezzate del fascio sono solo le due usate per determinarne l'equazione. Una si ottiene per $h = 0$, l'altra è la conica nascosta. Di conseguenza, possiamo concludere che $|B| \neq 0$ per $h \neq 0$, cioè che per $h \neq 0$ abbiamo coniche irriducibili. Poi:

$$|A| = \begin{vmatrix} h+1 & \frac{h-4}{2} \\ \frac{h-4}{2} & 4 \end{vmatrix} = \frac{-h^2 + 24h}{4}.$$

Dunque, per $0 < h < 24$ abbiamo delle ellissi (ovviamente reali), ma non abbiamo alcuna circonferenza. Per $h = 24$ abbiamo una parabola. Per $h < 0$ e $h > 24$ abbiamo delle iperboli; nel caso $h = -5$ abbiamo un'iperbole equilatera.

3) Si vede facilmente che:

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & h & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ h & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = h^2 - 1 \text{ e } |A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & h \\ 0 & 1 & 0 \\ h & 0 & 0 \end{vmatrix} = -h^2.$$

Quindi, per $h = \pm 1$ abbiamo due coni e per $h = 0$ abbiamo un paraboloide ellittico. Sia $h \neq 0, \pm 1$. In tal caso, vediamo che:

$$P_A(T) = \begin{vmatrix} 1-T & 0 & h \\ 0 & 1-T & 0 \\ h & 0 & -T \end{vmatrix} = (1-T)(T^2 - T - h^2) = -T^3 + 2T^2 + (h^2-1)T - h^2.$$

Dunque, è evidente che abbiamo degli iperboloidi, per cui per $h < -1$ e $h > 1$ abbiamo degli iperboloidi iperbolici. Per $-1 < h < 1$, con $h \neq 0$, abbiamo degli iperboloidi ellittici.