CdL in Ingegneria Informatica - Ingegneria Elettronica (P-Z) -Ingegneria REA

Prova scritta di **Algebra lineare e Geometria**- 13 Luglio 2015

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.

I

Sia $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'endomorfismo tale che:

$$M(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & k & 2-k \\ 3 & -2 & k & -k \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k & 1-k \end{pmatrix},$$

al variare di $k \in \mathbb{R}$.

1. Studiare l'endomorfismo f al variare di k, determinando in ogni caso $\operatorname{Ker} f$ e $\operatorname{Im} f$ e le loro equazioni cartesiane.
2. Verificare che f è semplice per ogni $k \in \mathbb{R}$ e determinare una base di autovettori indipendente dal parametro.
3. Dato $V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y + z = 0\}$, determinare, al variare di $k \in \mathbb{R}$, $f(V)$, specificandone la dimensione.
4. Data l'applicazione lineare $g\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ definita da $g(x, y, z, t) = (x - y, x + z + t, z)$ determinare $(g \circ f)(x, y, z, t)$.

*S*oluzione

1. Dal momento che $|M(f)| = 2(1 - k)$, concludiamo subito che per $k \neq 1$ f è un isomorfismo, cioè f è iniettiva e suriettiva, per cui $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^4$ e $\operatorname{Ker} f = \{(0, 0, 0, 0)\}$.

   Sia $k = 1$. Allora:

   $$M(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{\text{riducendo}}{\longmapsto} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Dunque, $\dim \operatorname{Im} f = \rho(M(f)) = 3$ e $\operatorname{Im} f = \mathscr{L}((-1, 3, 0, 0), (1, 1, 1, 1), (1, -1, 0, 0))$. Inoltre, la sua equazione cartesiana è:

   $$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ x & y & z & t \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -4(z - t) = 0,$$

   per cui $\operatorname{Im} f = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid z - t = 0\}$. Poi, $\dim \operatorname{Ker} f = 1$ e:

   $$\operatorname{Ker} f = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid -x + z + t = 0,\ 2x - 2y + 2z = 0,\ z = 0\} = \mathscr{L}((1, 1, 0, 1)).$$

2. Dato che:

$$P(T) = \begin{vmatrix} -1-T & 0 & k & 2-k \\ 3 & -2-T & k & -k \\ 0 & 0 & 1-T & 0 \\ 0 & 0 & k & 1-k-T \end{vmatrix} = (1-T)(-1-T)(-2-T)(1-k-T),$$

vediamo che gli autovalori sono $1, -1, -2, 1-k$. Essendo distinti per $k \neq 0, 2, 3$, possiamo dire che in questo caso f è semplice. Cerchiamo la base di autovettori in questo caso.

Supponiamo, dunque, che $k \neq 0, 2, 3$. Sia $T = 1$. Sappiamo che $V_1 = \ker(f_1)$, dove $f_1 = f - i$ e:

$$M(f_1) = M(f) - I = \begin{pmatrix} -2 & 0 & k & 2-k \\ 3 & -3 & k & -k \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & -k \end{pmatrix} R_1 \Leftrightarrow R_2 \begin{pmatrix} 3 & -3 & k & -k \\ -2 & 0 & k & 2-k \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & -k \end{pmatrix},$$

per cui:

$$V_1 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 3x - 3y + kz - kt = 0,\ -2x + kz + (2-k)t = 0,\ kz - kt = 0\} = \mathscr{L}((1, 1, 1, 1)).$$

Sia $T = -1$. Sappiamo che $V_{-1} = \ker(f_{-1})$, dove $f_{-1} = f + i$ e:

$$M(f_{-1}) = M(f) + I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & k & 2-k \\ 3 & -1 & k & -k \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & k & 2-k \end{pmatrix} \overset{\text{riducendo}}{\longmapsto} \begin{pmatrix} 3 & -1 & k & -k \\ 0 & 0 & k & 2-k \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

per cui:

$$V_{-1} = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 3x - y + kz - kt = 0,\ kz + (2-k)t = 0,\ z = 0\} = \mathscr{L}((1, 3, 0, 0)).$$

Sia $T = -2$. Sappiamo che $V_{-2} = \ker(f_{-2})$, dove $f_{-2} = f + 2i$ e:

$$M(f_{-2}) = M(f) + 2I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & k & 2-k \\ 3 & 0 & k & -k \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & k & 3-k \end{pmatrix} R_1 \Leftrightarrow R_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & k & 2-k \\ 160 & 0 & -2k & 2k-6 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

per cui:

$$V_{-2} = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + kz + (2-k)t = 0,\ -2kz + (2k-6)t = 0,\ 3z = 0\} = \mathscr{L}((0, 1, 0, 0)).$$

Sia $T = 1-k$. Sappiamo che $V_{1-k} = \ker(f_{1-k})$, dove $f_{1-k} = f - (1-k)i$ e:

$$M(f_{1-k}) = M(f) - (1-k)I = \begin{pmatrix} k-2 & 0 & k & 2-k \\ 3 & k-3 & k & -k \\ 0 & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k & 0 \end{pmatrix} \overset{\text{riducendo}}{\longmapsto} \begin{pmatrix} 3 & k-3 & k & -k \\ k-2 & 0 & k & 2-k \\ 0 & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

per cui:

$$V_{1-k} = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 3x + (k-3)y + kz - kt = 0,\ (k-2)x + kz + (2-k)t = 0,\ kz = 0\} = \mathscr{L}((1, 1, 0, 1)).$$

Dunque, per $k \neq 0, 2, 3$ una base di autovettori è $[(1, 1, 1, 1), (1, 3, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (1, 1, 0, 1)]$. Dal momento che il parametro k non vi compare, questa è una base di autovettori anche per $k = 0, 2, 3$, per cui f è certamente semplice anche in questi casi e $[(1, 1, 1, 1), (1, 3, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (1, 1, 0, 1)]$ è la base di autovettori cercata.

3. Dal momento che:

$$V = \{(x, x+z, z, t) \in \mathbb{R}^4\} = \mathscr{L}((1,1,0,0),(0,1,1,0),(0,0,0,1)),$$

possiamo dire che:

$$f(V) = \mathscr{L}(f(1,1,0,0), f(0,1,1,0), f(0,0,0,1)) = \mathscr{L}((-1,1,0,0),(k,k-2,1,k),(2-k,-k,0,1-k)).$$

Dal momento che la matrice:

$$\begin{pmatrix} k & k-2 & 1 & k \\ 2-k & -k & 0 & 1-k \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

è ridotta di rango 3 per $k \neq 1$, concludiamo che in tal caso $\dim f(V) = 3$.

Sia $k = 1$. In questo caso:

$$f(V) = \mathscr{L}((-1,1,0,0),(1,-1,1,1),(1,-1,0,0)) = \mathscr{L}((-1,1,0,0),(1,-1,1,1)),$$

per cui, essendo i vettori $(-1,1,0,0)$ e $(1,-1,1,1)$ linearmente indipendenti, per $k = 1$ si ha $\dim f(V) = 2$.

4. Dal momento che:

$$M(g) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

abbiamo:

$$M(g \circ f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & k & 2-k \\ 3 & -2 & k & -k \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k & 1-k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 2k+1 & 3-2k \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

per cui:

$$(g \circ f)(x,y,z,t) = (-4x + 2y + 2t, -x + (2k+1)z + (3-2k)t, z),$$

per ogni $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$.

II

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O.\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}.u$.

1. Date le rette $r\colon x - z = y = 0$ e $s\colon y - 3 = 2x + z = 0$, determinare la retta passante per $P = (4,4,2)$, incidente r e ortogonale a s.

2. Studiare il fascio di coniche del piano $z = 0$ di equazione:

$$3x^2 + hxy + 2x + y = 0,$$

determinando, in particolare, punti base e coniche spezzate. Determinare la conica Γ del fascio passante per il punto $(-1,1)$.

3. Determinare e studiare la quadrica contenente Γ, la retta $t\colon x + 1 = y - 1 = 0$ ed i punti $A = (0,0,1)$ e $B = (-1,0,1)$.

Soluzione

1. La retta cercata è l'intersezione del piano π_1 contenente r e P con il piano π_2 perpendicolare a s e passante per P.

   Il fascio di piani contenente r ha equazione:

$$\lambda(x - z) + \mu y = 0.$$

   Imponendo il passaggio per P abbiamo $\lambda = -2\mu$, per cui:

$$\pi_1\colon 2x - y - 2z = 0.$$

   La retta s ha parametri direttori $(1, 0, -2)$, per cui il piano π_2 perpendicolare a s e passante per P è $\pi_2\colon x - 2z = 0$. Dunque, la retta cercata ha equazioni:

$$\begin{cases} 2x - y - 2z = 0 \\ x - 2z = 0. \end{cases}$$

2. Cominciamo con l'osservare che la conica nascosta è $xy = 0$, che sarà una prima conica spezzata del fascio. Poi, da:

$$B = \begin{pmatrix} 3 & \frac{h}{2} & 1 \\ \frac{h}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{h}{2} & 0 \end{pmatrix},$$

   osserviamo che $|B| = \frac{2h-3}{4}$, per cui per $h = \frac{3}{2}$ otteniamo l'altra conica spezzata:

$$3x^2 + \frac{3}{2}xy + 2x + y = 0 \Rightarrow (3x + 2)(2x + y) = 0.$$

   Quindi, i punti base sono dati da:

$$\begin{cases} (3x + 2t)(2x + y) = 0 \\ xy = 0, \end{cases}$$

   cioè sono $(0, 0)$ preso due volte, $(0, 1, 0)$ e $(-\frac{2}{3}, 0)$. Inoltre, essendo $|A| = -\frac{h^2}{4}$, osserviamo che per $h = 0$ abbiamo una parabola, mentre per $h \neq 0, \frac{3}{2}$ abbiamo delle iperboli, nessuna delle quali è equilatera.

   Infine, imponendo il passaggio per il punto $(-1, 1)$ troviamo $3 - h - 2 + 1 = 0$, per cui $h = 2$ e:

$$\Gamma\colon 3x^2 + 2xy + 2x + y = 0.$$

3. Le quadriche contenenti Γ hanno equazione:

$$3x^2 + 2xy + 2x + y + z(ax + by + cz + d) = 0.$$

   Intersecando con la retta $x + 1 = y - 1 = 0$ otteniamo:

$$\begin{cases} 3x^2 + 2xy + 2x + y + z(ax + by + cz + d) = 0 \\ x = -1 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} cz^2 + (-a + b + d)z = 0 \\ x = -1 \\ y = 1. \end{cases}$$

   La retta è contenuta nella quadrica se $c = 0$ e $-a + b + d = 0$. Imponendo il passaggio per i punti A e B otteniamo, rispettivamente, $c + d = 0$ e $-a + c + d + 1 = 0$. Dunque, da:

$$\begin{cases} c = 0 \\ -a + b + d = 0 \\ c + d = 0 \\ -a + c + d + 1 = 0 \end{cases}$$

   otteniamo $a = 1$, $b = 1$, $c = 0$ e $d = 0$, per cui la quadrica cercata ha equazione:

$$3x^2 + 2xy + xz + yz + 2x + y = 0.$$

Dal momento che:

$$|B| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{16} \quad \text{e} \quad |A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{4},$$

concludiamo che la quadrica è un iperboloide iperbolico, non potendo essere un ellissoide immaginario in quanto contiene punti reali.