CdL in Ingegneria Informatica - Ingegneria Elettronica (P-Z)
Ingegneria REA - Ingegneria Industriale (F-O)
Ingegneria Gestionale - Ingegneria Meccanica - Ingegneria Elettrica

Prova scritta di **Algebra lineare e Geometria**- 11 Settembre 2015

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.

I

Dato lo spazio vettoriale $V = \mathscr{L}(v_1, v_2, v_3)$, con $v_1 = (1,0,0,0)$, $v_2 = (0,1,0,0)$ e $v_3 = (0,1,-1,1) \in \mathbb{R}^4$, è assegnata l'applicazione lineare $f\colon V \to \mathbb{R}^4$ tale che:

$$\begin{aligned} f(v_1) &= (h,1,-1,1) \\ f(v_2) &= (1,1,1,h) \\ f(v_3) &= (1,2,1,h), \end{aligned}$$

al variare di $h \in \mathbb{R}$.

1. Studiare f, al variare di $h \in \mathbb{R}$, determinando $\operatorname{Ker} f$ e $\operatorname{Im} f$.
2. Dato $W = \mathscr{L}((1,0,1,-1),(0,1,-1,1),(1,2,0,0)) \subset \mathbb{R}^4$, determinare il valore di $h \in \mathbb{R}$ per il quale $\operatorname{Im} f \subseteq W$ e dire se, in tal caso, i due spazi sono uguali.
3. Dimostare che nel caso $h = -1$ f induce un endomorfismo $g\colon V \to V$ e studiare la semplicità di g, determinando, se possibile, una base di autovettori.
4. Nel caso $h = 1$ determinare l'estensione $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ di f tale che $(0,0,0,1) \in V_1$.

Soluzione

1. Da:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xmapsto{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

vediamo che la matrice ha rango 3, per cui i tre vettori v_1, v_2 e v_3 sono linearmente indipendenti e individuano, dunque, una base $\mathcal{A} = [v_1, v_2, v_3]$ di V. Possiamo scrivere, perciò:

$$M^{\mathcal{A},\mathcal{E}}(f) = \begin{pmatrix} h & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & h & h \end{pmatrix}.$$

Dato che:

$$\begin{vmatrix} h & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -h - 1,$$

possiamo dire che per $h \neq -1$ $M^{\mathcal{A},\mathcal{E}}(f)$ ha un minore non nullo di ordine 3. Dunque, per $h \neq -1$ si ha $\rho(M^{\mathcal{A},\mathcal{E}}(f)) = 3$ e $\dim \operatorname{Im} f = 3$ e una sua base è $[(h,1,-1,1),(1,1,1,h),(1,2,1,h)]$. Inoltre:

$$\dim \operatorname{Ker} f = \dim V - \dim \operatorname{Im} f = 3 - 3 = 0,$$

per cui $\operatorname{Ker} f = \{(0,0,0,0)\}$ e f è iniettiva.

Sia $h = -1$. In tal caso:

$$M^{\mathcal{A},\mathcal{E}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xmapsto{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque $\dim \operatorname{Im} f = \rho(M^{\mathcal{A},\mathcal{E}}(f)) = 2$ e una sua base è $[(-1,1,-1,1),(1,1,1,-1)]$. Inoltre, $\dim \operatorname{Ker} f = \dim V - \dim \operatorname{Im} f = 1$ e:

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker} f &= \{v \in V \mid [v]_{\mathscr{A}} = (a,b,c,),\ -a+b+c = 0,\ 2b+3c = 0\} = \\ &= \{v \in V \mid [v]_{\mathscr{A}} = (-\tfrac{1}{2}c, -\tfrac{3}{2}c, c)\} = \mathscr{L}(-v_1 - 3v_2 + 2v_3) = \mathscr{L}((-1,-1,-2,2)). \end{aligned}$$

2. Da:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ x & y & z & t \end{pmatrix} \xmapsto{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & z+t \end{pmatrix},$$

vediamo che $W = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid z + t = 0\}$. Dal momento che:

$$\operatorname{Im} f = \mathscr{L}((h,1,-1,1),(1,1,1,h),(1,2,1,h))$$

per ogni $h \in \mathbb{R}$, $\operatorname{Im} f \subseteq W$ se e solo se $(h,1,-1,1),(1,1,1,h),(1,2,1,h) \in W$. Questi tre vettori appartengono contemporaneamente a W se e solo se $h = -1$. Ma per tale valore, abbiamo visto che $\dim \operatorname{Im} f = 2$, mentre $\dim W = 3$. Dunque, il valore cercato è $h = -1$ e si ha $\operatorname{Im} f \subsetneq W$.

3. Da:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ x & y & z & t \end{vmatrix} = -t - z$$

vediamo che $V = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid z + t = 0\} = W$. Avendo già verificato che per $h = -1$ si ha $\operatorname{Im} f \subset W$, abbiamo anche chiaramente che $\operatorname{Im} f \subset V$.

Essendo g indotto da f abbiamo:

$$\begin{aligned} g(v_1) &= f(v_1) = (-1,1,-1,1) \\ g(v_2) &= f(v_2) = (1,1,1,-1) \\ g(v_3) &= f(v_3) = (1,2,1,-1). \end{aligned}$$

Inoltre, preso il generico $(x,y,z,-z) \in V$ si ha $[(x,y,z,-z)]_{\mathscr{A}} = (x, y+z, -z)$. Dunque, possiamo scrivere:

$$M^{\mathscr{A}}(g) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

e si ha:

$$P(T) = \begin{vmatrix} -1-T & 1 & 1 \\ 0 & 2-T & 3 \\ 1 & -1 & -1-T \end{vmatrix} = -T(1-T)(-1-T).$$

Dunque, gli autovalori sono $T = 0$, $T = -1$ e $T = 1$, per cui g è certamente semplice.

Sia $T = 0$. In tal caso, $V_0 = \operatorname{Ker} g = \operatorname{Ker} f = \mathscr{L}((-1,-1,-2,2))$.

Sia $T = 1$. In tal caso, $V_1 = \operatorname{Ker} g_1$, dove $g_1 = g - i$ e:

$$M^{\mathscr{A}}(g_1) = M^{\mathscr{A}}(g) - I = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \overset{\text{riducendo}}{\longmapsto} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi:

$$\begin{aligned} V_1 = \operatorname{Ker} g_1 = \{v \in V \mid [v]_{\mathscr{A}} = (a, b, c,),\ -2a + b + c = 0,\ b + 3c = 0\} = \\ = \{v \in V \mid [v]_{\mathscr{A}} = (-c, -3c, c)\} = \mathscr{L}(-v_1 - 3v_2 + v_3) = \mathscr{L}((-1, -2, -1, 1)). \end{aligned}$$

Sia $T = -1$. In tal caso, $V_{-1} = \operatorname{Ker} g_{-1}$, dove $g_{-1} = g + i$ e:

$$M^{\mathscr{A}}(g_{-1}) = M^{\mathscr{A}}(g) + I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \overset{\text{riducendo}}{\longmapsto} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi:

$$\begin{aligned} V_{-1} = \operatorname{Ker} g_{-1} = \{v \in V \mid [v]_{\mathscr{A}} = (a, b, c,),\ b + c = 0,\ a - b = 0\} = \\ = \{v \in V \mid [v]_{\mathscr{A}} = (b, b, -b)\} = \mathscr{L}(v_1 + v_2 - v_3) = \mathscr{L}((1, 0, 1, -1)). \end{aligned}$$

Quindi, la base di autovettori cercata è $[(-1, -1, -2, 2), (-1, 2, -1, 1), (1, 0, 1, -1)]$.

4. Dal momento che $(0, 0, 0, 1) \notin V$, non verificando la sua equazione cartesiana, possiamo dire che $[v_1, v_2, v_3, (0, 0, 0, 1)]$ è una base di $\mathbb{R}^4$. Inoltre, la condizione $(0, 0, 0, 1) \in V_1$ vuol dire che $(0, 0, 0, 1)$ è un autovettore associato all'autovalore 1. Quindi, le condizioni:

$$\begin{aligned} \varphi(v_1) &= f(v_1) = (1, 1, -1, 1) \\ \varphi(v_2) &= f(v_2) = (1, 1, 1, 1) \\ \varphi(v_3) &= f(v_3) = (1, 2, 1, 1) \\ \varphi(0, 0, 0, 1) &= (0, 0, 0, 1) \end{aligned}$$

determinano perfettamente l'endomorfismo cercato.

II

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1. Data la retta:

$$r\colon \begin{cases} x - y + z = 3 \\ x + 2y - 3z = 3 \end{cases}$$

e dato il punto $P = (0, 0, 1)$, determinare il punto P' simmetrico di P rispetto alla retta r e le distanze di P dalla retta r e di P da P'.

2. Studiare il fascio di coniche del piano $z = 0$ avente equazione:

$$x^2 + (h + 3)xy + 2y^2 - y - 1 = 0,$$

determinando, in particolare, punti base e coniche spezzate.

3. Studiare, al variare di $h \in \mathbb{R}$, le quadriche di equazione:

$$hx^2 + 2xz + y^2 + z^2 + 2x + 2y = 0.$$

Soluzione

1. La retta r ha parametri direttori $(1,4,3)$, per cui il piano π passante per P e perpendicolare a r ha equazione $\pi\colon x+4y+3z-3=0$. Il punto $H=r\cap\pi$ è dato da:

$$\begin{cases} x+4y+3z=3 \\ x-y+z=3 \\ x+2y-3z=3 \end{cases} \Rightarrow H=(3,0,0).$$

Quindi, il punto $P'=(a,b,c)$ è il simmetrico di P rispetto a H e si ha:

$$\begin{cases} \frac{a}{2}=3 \\ \frac{b}{2}=0 \\ \frac{c+1}{2}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=6 \\ b=0 \\ c=-1. \end{cases}$$

Quindi, $P'=(6,0,-1)$ e si ha $\overline{PP'}=2\sqrt{10}$ e $d(P,r)=\overline{PH}=\frac{\overline{PP'}}{2}=\sqrt{10}$.

2. La matrice associata al fascio di coniche è:

$$B=\begin{pmatrix} 1 & \frac{h+3}{2} & 0 \\ \frac{h+3}{2} & 2 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}.$$

Dal momento che $|B|=\frac{h^2+6h}{4}$, vediamo che le coniche spezzate del fascio sono, oltre quella nascosta di equazione $xy=0$, quelle che si ottengono per $h=0$ e $h=-6$. In particolare, per $h=0$ abbiamo la conica $(x+y-1)(x+2y+1)=0$ e per $h=-6$ abbiamo la conica $(x-y+1)(x-2y-1)=0$. I punti base del fascio si ottengono intersecando due di queste coniche e sono $(0,-\frac{1}{2})$, $(0,1)$, $(1,0)$ e $(-1,0)$.

Inoltre, essendo:

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & \frac{h+3}{2} \\ \frac{h+3}{2} & 2 \end{vmatrix}=-\frac{h^2+6h+1}{4},$$

vediamo che per $h<-3-2\sqrt{2}$ e $h>-3+2\sqrt{2}$, $h\neq 0,-6$, abbiamo delle iperboli, nessuna delle quali è equilatera. Per $h=-3\pm 2\sqrt{2}$ abbiamo due parabole e per $-3-2\sqrt{2}<h<-3+2\sqrt{2}$ abbiamo delle ellissi, nessuna delle quali è una circonferenza. Ovviamente, le ellissi sono tutte reali, in quanto i punti base sono tutti reali.

3. Le matrici associate alle quadriche sono:

$$B=\begin{pmatrix} h & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A=\begin{pmatrix} h & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dal momento che $|B|=-h$ e $|A|=h-1$, per $h=0$ abbiamo un cono e per $h=1$ abbiamo un paraboloide ellittico.

Sia $h\neq 0,1$. Essendo:

$$P_A(T)=\begin{vmatrix} h-T & 0 & 1 \\ 0 & 1-T & 0 \\ 1 & 0 & 1-T \end{vmatrix}=-T^3+(h+2)T^2-2hT+h-1,$$

vediamo che gli autovalori di A sono concordi se e solo se $h>1$. Quindi, possiamo concludere che gli ellissoidi si hanno solo per $h>1$. In particolare, per $h>1$ abbiamo degli ellissoidi reali, per $0<h<1$ abbiamo degli iperboloidi ellittici e per $h<0$ abbiamo degli iperboloidi iperbolici.