CdL in Ingegneria Informatica (P-Z) - Ingegneria Elettronica (P-Z)
Ingegneria Civile e Ambientale (M-Z)

Prova in itinere di **Geometria**, corso di **Algebra lineare e Geometria** - 14 Giugno 2014

Durata della prova: due ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.

Compito A

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1) Sono dati i punti $A = (1, -1, 0)$, $B = (0, 1, 1)$, $C = (2, 0, 2)$ e $P_\infty = (1, 1, 0, 0)$.
   (a) Calcolare l'angolo individuato dalle rette AB e AC.
   (b) Determinare il piano π contenente le rette AB e AC.
   (c) Determinare la retta passante per A e perpendicolare alle rette AB e AC.
   (d) Determinare la proiezione ortogonale della retta AP_∞ sul piano π.

2) Dati i punti $O = (0, 0)$, $A = (-2, 0)$, $B = (0, -2)$ e $C = (-2, -6)$ del piano $z = 0$, determinare e studiare il fascio di coniche passanti per questi punti. Determinare il vertice della parabola del fascio.

3) Determinare la natura delle seguenti quadriche:
   (a) $2x^2 - yz + 2z^2 + 2y - z = 0$,
   (b) $x^2 - yz + z^2 + y - z = 0$,
   (c) $4x^2 + y^2 + 4z^2 + 4xy - 8xz - 4yz + 1 = 0$.

Soluzione

1) La retta AB e la retta AC hanno $(1, -2, -1)$ e $(-1, -1, -2)$, rispettivamente, come parametri direttori. Dunque, le due rette individuano un angolo di $\frac{\pi}{3}$. Inoltre, il piano che le due rette individuano ha equazione:

$$\pi\colon \begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 3x + 3y - 3z = 0.$$

Dunque, $\pi\colon x + y - z = 0$. La retta passante per A e perpendicolare alle rette AB e AC ha parametri direttori $(1, 1, -1)$, per cui essa ha equazioni:

$$\begin{cases} x + z - 1 = 0 \\ y + z + 1 = 0. \end{cases}$$

La retta AP_∞ ha equazioni:

$$\begin{cases} x - y - 2 = 0 \\ z = 0. \end{cases}$$

Il fascio di piani che la contengono ha equazione $\lambda(x - y - 2) + \mu z = 0$. Vogliamo che questo piano sia perpendicolare al piano π. Dunque, deve essere $\mu = 0$. Quindi, la proiezione ortogonale di AP_∞ sul piano π è:

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - y - 2 = 0. \end{cases}$$

2) Le coniche spezzate contenenti i quattro punti sono $OA \cup BC\colon y(2x-y-2)=0$, $OB \cup AC\colon x(x+2)=0$ e $OC \cup AB\colon (3x-y)(x+y+2)=0$. Dunque, il fascio di coniche ha equazione:

$$y(2x-y-2)+hx(x+2)=0 \Rightarrow hx^2+2xy-y^2+2hx-2y=0.$$

Le matrici associate sono:

$$B=\begin{pmatrix} h & 1 & h \\ 1 & -1 & -1 \\ h & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A=\begin{pmatrix} h & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

per cui $|B|=h^2-3h$ e $|A|=-h-1$. Quindi, per $h=0$ troviamo la conica spezzata $OA \cup BC\colon y(2x-y-2)=0$ e per $h=3$ troviamo $OC \cup AB\colon (3x-y)(x+y+2)=0$. Inoltre, per $h>-1$, con $h \neq 0,3$ abbiamo delle iperboli; per $h=1$ abbiamo un'iperbole equilatera. Per $h=-1$ abbiamo una parabola. Per $h<-1$ abbiamo delle ellissi (tutte reali). Non ci sono circonferenze nel fascio.

La parabola del fascio ha equazione $x^2-2xy+y^2+2x+2y=0$. Il suo punto improprio è:

$$\begin{cases} x^2-2xy+y^2+2xt+2yt=0 \\ t=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-y)^2=0 \\ t=0 \end{cases} \Rightarrow P_\infty=(1,1,0).$$

Le rette ortogonali alla direzione individuata da P_∞ hanno equazioni $y=-x+k$. Tra queste rette cerchiamo quella tangente:

$$\begin{cases} x^2-2xy+y^2+2x+2y=0 \\ y=-x+k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-x+k \\ 4x^2-4kx+k^2+2k=0. \end{cases}$$

Affinché la rette sia tangente deve essere $\frac{\Delta}{4}=0$, cioè $k=0$. Dunque, abbiamo:

$$\begin{cases} y=-x \\ 4x^2=0, \end{cases}$$

per cui il vertice è $V=(0,0)$.

3) (a) La quadrica data ha $|B|=-3$ e $|A|\neq 0$, per cui può essere un iperboloide ellittico o un ellissoide. Dato che $P_A(T)=(2-T)(T^2-2T-\frac{1}{4})$, essa è un iperboloide ellittico.

(b) La quadrica data ha $|B|=0$ e $|A|\neq 0$, per cui essa è un cono.

(c) La quadrica data ha $|B|=0$ e $|A|=0$. Dal momento che $\rho(B)=2$, essa è una quadrica spezzata in due piani distinti.