CdL in Ingegneria Informatica (P-Z) - Ingegneria Elettronica (P-Z)

Prova in itinere di **Algebra lineare**, corso di **Algebra lineare e Geometria** - 10 Maggio 2014

Durata della prova: due ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.

I

È assegnata l'applicazione lineare $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da:

$$f(x,y,z) = ((h+2)x + y + z, hx + 3y + z, 2x + y + (h+1)z)$$

al variare di $h \in \mathbb{R}$.

1) Studiare f al variare di $h \in \mathbb{R}$, determinando $\operatorname{Ker} f$ e $\operatorname{Im} f$.

2) Calcolare, al variare di $h \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(1,1,1)$.

II

Sono dati i vettori $v_1 = (1,-1,1)$, $v_2 = (1,0,1)$, $v_3 = (1,1,0)$ e la base $\mathscr{A} = [v_1, v_2, v_3]$ di $\mathbb{R}^3$. È assegnata l'applicazione lineare $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da:

$$M(g) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & h+1 \\ h & 0 & -2h \\ 1 & 1 & h \end{pmatrix}$$

al variare di $h \in \mathbb{R}$.

1) Determinare $M^{\mathscr{A}}(g)$.

2) Studiare la semplicità di g al variare di $h \in \mathbb{R}$.

Soluzione

I

1) La matrice associata a f rispetto alla base canonica è:

$$M(f) = \begin{pmatrix} h+2 & 1 & 1 \\ h & 3 & 1 \\ 2 & 1 & h+1 \end{pmatrix}.$$

Dal momento che $|M(f)| = 2h^2 + 8h$, deduciamo che per $h \neq 0, -4$ f è un isomorfismo, cioè f è iniettiva e suriettiva. Dunque, per $h \neq 0, -4$ $\operatorname{Ker} f = \{(0,0,0)\}$ e $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^3$.

Sia $h = 0$. In tal caso:

$$M(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{\text{riducendo}}{\longmapsto} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque, $\dim \operatorname{Im} f = 2$ e una sua base è $[(2,0,2),(1,3,1)]$ e $\dim \operatorname{Ker} f = 1$. Inoltre:

$$\operatorname{Ker} f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y + z = 0,\ 3y + z = 0\} = \mathscr{L}((1,1,-3)).$$

Sia $h = -4$. In tal caso:

$$M(f) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -4 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \xmapsto{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque, $\dim \operatorname{Im} f = 2$ e una sua base è $[(2,-4,2),(1,1,-3)]$ e $\dim \operatorname{Ker} f = 1$. Inoltre:

$$\operatorname{Ker} f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid -2x + y + z = 0,\ -2x + 2y = 0\} = \mathscr{L}((1,1,1)).$$

2) Occorre risolvere il sistema la cui matrice completa è:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} h+2 & 1 & 1 & 1 \\ h & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & h+1 & 1 \end{array}\right).$$

Per $h \neq 0, -4$ troviamo:

$$\begin{cases} x = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & h+1 \end{vmatrix}}{2h^2 + 8h} = \dfrac{1}{h+4} \\ y = \dfrac{\begin{vmatrix} h+2 & 1 & 1 \\ h & 1 & 1 \\ 2 & 1 & h+1 \end{vmatrix}}{2h^2 + 8h} = \dfrac{1}{h+4} \\ z = \dfrac{\begin{vmatrix} h+2 & 1 & 1 \\ h & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{2h^2 + 8h} = \dfrac{1}{h+4}, \end{cases}$$

di modo che per $h \neq 0, -4$ abbiamo:

$$f^{-1}(1,1,1) = \left\{ \left(\frac{1}{h+4}, \frac{1}{h+4}, \frac{1}{h+4} \right) \right\}.$$

Sia $h = 0$. In tal caso:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xmapsto{\text{riducendo}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

per cui:

$$f^{-1}(1,1,1) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y + z = 1,\ 3y + z = 1\} = \{(y, y, -3y + 1) \in \mathbb{R}^3\}.$$

Sia $h = -4$. In tal caso:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 1 \\ -4 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right) \xmapsto{\text{riducendo}} \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right),$$

per cui:

$$f^{-1}(1,1,1) = \emptyset.$$

II

1) Un semplice calcolo mostra che:

$$\begin{aligned} g(1,-1,1) &= (h,-h,h) \\ g(1,0,1) &= (h+1,-h,h+1) \\ g(1,1,0) &= (1,h,2). \end{aligned}$$

Inoltre, si vede che:

$$[(x,y,z)]_{\mathscr{A}} = (x-y-z, -x+y+2z, x-z)$$

per cui:

$$\begin{aligned} [g(1,-1,1)]_{\mathscr{A}} &= [(h,-h,h)]_{\mathscr{A}} = (h,0,0) \\ [g(1,0,1)]_{\mathscr{A}} &= [(h+1,-h,h+1)]_{\mathscr{A}} = (h,1,0) \\ [g(1,1,0)]_{\mathscr{A}} &= [(1,h,2)]_{\mathscr{A}} = (-h-1,h+3,-1). \end{aligned}$$

Dunque:

$$M^{\mathscr{A}}(g) = \begin{pmatrix} h & h & -h-1 \\ 0 & 1 & h+3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

2) Dato che:

$$P(T) = \begin{vmatrix} h-T & h & -h-1 \\ 0 & 1-T & h+3 \\ 0 & 0 & -1-T \end{vmatrix} = (h-T)(1-T)(-1-T),$$

gli autovalori sono $h, 1, -1$. Dunque, per $h \neq 1, -1$ g è semplice.
Sia $h = 1$. In tal caso g sarà semplice se $\dim V_1 = m_1 = 2$. Sappiamo che $V_1 = \ker g_1$ e che:

$$M^{\mathscr{A}}(g_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \overset{\text{riducendo}}{\longmapsto} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque, $\dim V_1 = 3 - \rho(M^{\mathscr{A}}(g_1)) = 1 < m_1 = 2$, il che vuol dire che per $h = 1$ g non è semplice.
Sia $h = -1$. In tal caso g sarà semplice se $\dim V_{-1} = m_{-1} = 2$. Sappiamo che $V_{-1} = \ker g_{-1}$ e che:

$$M^{\mathscr{A}}(g_{-1}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque, $\dim V_{-1} = 3 - \rho(M^{\mathscr{A}}(g_{-1})) = 1 < m_{-1} = 2$, il che vuol dire che per $h = -1$ g non è semplice.