CdL in Ingegneria Informatica - Ingegneria Elettronica (P-Z) -Ingegneria REA

Prova scritta di **Algebra lineare e Geometria**- 30 Settembre 2014

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.

I

È assegnata l'applicazione lineare $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definita da:

$$\begin{aligned} f(1,1,1,1) &= (h+2, h+2, h+2, h+2) \\ f(1,0,1,1) &= (2, h+1, 1, 2-h) \\ f(1,0,0,1) &= (2, h, 0, 2-h) \\ f(1,0,0,0) &= (1, h, 0, 1-h). \end{aligned}$$

1) Studiare f, al variare di $h \in \mathbb{R}$, determinando $\operatorname{Ker} f$ e $\operatorname{Im} f$ e le loro equazioni cartesiane.
2) Calcolare $f^{-1}(h+1, 0, 0, h+1)$.
3) Dato $V = \mathscr{L}((1,1,1,1),(1,0,0,1),(1,1,0,0))$, nel caso $h = 1$ verificare che la restrizione di f a V induce un endomorfismo $g\colon V \to V$.
4) Studiare la semplicità di g, determinando, se possibile, una base di autovettori.
5) Calcolare $g^{-1}(1,-1,-3,-1)$.

Soluzione

1) Si vede facilmente che la matrice associata a f rispetto alla base canonica è:

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & h & 0 & 1 \\ h & 1 & 1 & 0 \\ 0 & h+1 & 1 & 0 \\ 1-h & 2h & 0 & 1 \end{pmatrix} \xmapsto{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 1 & h & 0 & 1 \\ h & 1 & 1 & 0 \\ -h & h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque, per $h \neq 0$ $\dim \operatorname{Im} f = \rho(M(f)) = 3$ e una base di $\operatorname{Im} f$ è $[(1, h, 0, 1-h), (0,1,1,0), (1,0,0,1)]$. Una sua equazione cartesiana è data da:

$$\begin{vmatrix} 1 & h & 0 & 1-h \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ x & y & z & t \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow h(-x+y-z+t) = 0.$$

Essendo $h \neq 0$, possiamo concludere che in questo caso:

$$\operatorname{Im} f = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y + z - t = 0\}.$$

Inoltre, $\dim \operatorname{Ker} = 1$ e:

$$\operatorname{Ker} f = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + hy + t = 0,\ hx + y + z = 0,\ -hx + hy = 0\} = \mathscr{L}((1, 1, -1-h, -1-h)).$$

Sia $h = 0$. In tal caso:

$$M(f) = M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{\text{riducendo}}{\longmapsto} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque, $\dim \operatorname{Im} f = \rho(M(f)) = 2$ e $\operatorname{Im} f = \mathscr{L}((1,0,0,1),(0,1,1,0))$. Si vede facilmente che:

$$\operatorname{Im} f = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - t = 0,\ y - z = 0\}.$$

Inoltre, $\dim \operatorname{Ker} f = 2$ e:

$$\operatorname{Ker} f = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + t = 0,\ y + z = 0\} = \mathscr{L}((1,0,0,-1),(0,1,-1,0)).$$

2) Occorre risolvere il sistema la cui matrice completa è:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & h & 0 & 1 & h+1 \\ h & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & h+1 & 1 & 0 & 0 \\ 1-h & 2h & 0 & 1 & h+1 \end{array}\right) \overset{\text{riducendo}}{\longmapsto} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & h & 0 & 1 & h+1 \\ h & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -h & h & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Dunque, per $h \neq 0$ abbiamo:

$$f^{-1}(h+1,0,0,h+1) = \{(x,x,(-1-h)x,(-1-h)x+h+1) \in \mathbb{R}^4\}.$$

Se $h = 0$:

$$f^{-1}(1,0,0,1) = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + t = 1,\ y + z = 0\} = \{(x,y,-y,-x-1) \in \mathbb{R}^4\}.$$

3) Si vede facilmente che i tre generatori $(1,1,1,1),(1,0,0,1),(1,1,0,0)$ di V sono linearmente indipendenti, per cui essi formano una sua base $\mathscr{A} = [(1,1,1,1),(1,0,0,1),(1,1,0,0)]$. L'equazione cartesiana di V è:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -x + y - z + t = 0,$$

per cui $V = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y + z - t = 0\} = \operatorname{Im} f$. Dunque, è ovvio che la restrizione $f|_V$ induce un endomorfismo $g \colon V \to V$.

4) È semplice vedere che:

$$\begin{aligned} g(1,1,1,1) = f(1,1,1,1) &= (3,3,3,3) = 3 \cdot (1,1,1,1) \\ g(1,0,0,1) = f(1,0,0,1) &= (2,1,0,1) \\ g(1,1,0,0) = f(1,1,0,0) &= (2,2,2,2) = 2 \cdot (1,1,1,1). \end{aligned}$$

Inoltre, un semplice calcolo mostra che $[g(1,0,0,1)]_{\mathscr{A}} = (0,1,1)$. Dunque:

$$M^{\mathscr{A}}(g) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad P(T) = \begin{vmatrix} 3-T & 0 & 2 \\ 0 & 1-T & 0 \\ 0 & 1 & -T \end{vmatrix} = -T(1-T)(3-T).$$

Essendo i tre autovalori distinti di molteplicità algebrica 1, possiamo subito concludere che g è semplice. Cerchiamo la base di autovettori.

Sia $T = 0$. Allora:

$$V_0 = \operatorname{Ker} g = \{v \in V \mid [v]_{\mathscr{A}} = (a,b,c),\ 3a + 2c = 0,\ b = 0\} = \mathscr{L}((2,0,-3)_{\mathscr{A}}) = \mathscr{L}((-1,-1,1,1)).$$

Sia $T = 1$. Allora, $V_1 = \operatorname{Ker} g_1$ e:

$$M(g_1) = M(g) - I = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Dunque:

$$V_1 = \{v \in V \mid [v]_{\mathscr{A}} = (a, b, c),\ 2a + 2c = 0,\ b + c = 0\} = \mathscr{L}((-1, -1, 1)_{\mathscr{A}}) = \mathscr{L}((-1, 0, -1, -2)).$$

Sia $T = 3$. Allora, $V_3 = \operatorname{Ker} g_3$ e:

$$M(g_3) = M(g) - 3I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Dunque:

$$V_3 = \{v \in V \mid [v]_{\mathscr{A}} = (a, b, c),\ 2c = 0,\ 2b = 0\} = \mathscr{L}((1, 0, 0)_{\mathscr{A}}) = \mathscr{L}((1, 1, 1, 1)).$$

Quindi, una base di autovettori è $[(-1, -1, 1, 1), (-1, 0, -1, -2), (1, 1, 1, 1)]$.

5) Dal momento che $[(1, -1, -3, -1)]_{\mathscr{A}} = (-3, 2, 2)$, occorre risolvere il sistema:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right),$$

per cui:

$$g^{-1}(1, -1, -3, -1) = \{v \in V \mid [v]_{\mathscr{A}} = (a, b, c),\ 3a + 2c = -3,\ b = 2\} =$$
$$= \{v \in V \mid [v]_{\mathscr{A}} = (\frac{2}{3}c + 1, 2, c)\} = \{(\frac{5}{3}c + 3, \frac{5}{3}c + 1, \frac{2}{3}c + 1, \frac{2}{3}c + 3) \in \mathbb{R}^4\}.$$

II

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1) Determinare le equazioni della retta t ortogonale e incidente la retta $r\colon x - 2y + z - 1 = 2x + y - 2z = 0$ e passante per $P = (0, 1, 1)$. Calcolare $d(P, r)$.

2) Determinare e studiare la conica del piano $z = 0$ avente per asintoti le rette $3x - y + 1 = 0$ e $x - 3y - 1 = 0$ e passante per il punto $(\frac{1}{8}, -\frac{5}{8})$. Determinare, in particolare, assi di simmetria, centro di simmetria, fuochi e direttrici.

3) Determinare e studiare il luogo delle rette passanti per il punto $A = (1, 0, 1)$ e che formano un angolo di $\frac{\pi}{4}$ con la retta $x - z = y = 0$.

Soluzione

1) La retta r ha parametri direttori $(3, 4, 5)$, per cui il piano π passante per P e perpendicolare a r ha equazione $3x + 4y + 5z - 9 = 0$. Sia $H = \pi \cap r$:

$$\begin{cases} 3x + 4y + 5z - 9 = 0 \\ x - 2y + z = 1 \\ 2x + y - 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{5} \\ y = \frac{2}{5} \\ z = 1, \end{cases}$$

per cui $H = (\frac{4}{5}, \frac{2}{5}, 1)$ e la retta $t = PH$:

$$t\colon \begin{cases} 3x + 4y - 4 = 0 \\ z = 1. \end{cases}$$

Inoltre, $d(P, r) = \overline{PH} = 1$.

2) Il fascio di iperboli aventi come asintoti le due rette assegnate ha equazione:

$$\lambda(3x - y + t)(x - 3y - t) + \mu t^2 = 0 \Rightarrow \lambda(3x - y + 1)(x - 3y - 1) + \mu = 0.$$

Imponendo il passaggio per P otteniamo $2\lambda + \mu = 0$, per cui, prendendo $\lambda = 1$ e $\mu = -2$, otteniamo l'iperbole cercata:

$$3x^2 - 10xy + 3y^2 - 2x - 2y - 3 = 0.$$

Le matrici associate B e A sono tali che $|B| = 8$ e $|A| = -16$. Inoltre, essendo la conica assegnata un'iperbole, la sua forma canonica sarà del tipo $\alpha X^2 + \beta Y^2 = \gamma$. Quindi:

$$\gamma = -\frac{|B|}{|A|} = \frac{1}{2}.$$

α e β sono gli autovalori di A, che sono 8 e -2. Prendendo $\alpha = 8$ e $\beta = -2$ vediamo che una forma canonica è:

$$8X^2 - 2Y^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{X^2}{\frac{1}{16}} - \frac{Y^2}{\frac{1}{4}} = 1.$$

Quindi, abbiamo $a^2 = \frac{1}{16}$ e $b^2 = \frac{1}{4}$, per cui $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{\sqrt{5}}{4}$ e $\frac{a^2}{c} = 4\sqrt{5}$.

Il centro di simmetria si ottiene risolvendo il sistema associato alle prime due righe della matrice B:

$$\begin{cases} 3x - 5y - 1 = 0 \\ -5x + 3y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

per cui $C = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$. Gli assi di simmetria sono le rette parallele agli autospazi associati ad A e passanti per C. L'autospazio associato all'autovalore 8 ha equazione $x + y = 0$. La retta ad essa parallela e passante per C ha equazione $x + y + 1 = 0$: questo è un primo asse di simmetria.

L'autospazio associato all'autovalore -2 ha equazione $x - y = 0$. La retta $x - y = 0$ passa per C, per cui questo è il secondo asse di simmetria.

Cerchiamo i vertici dell'iperbole e l'asse trasverso. Dall'intersezione:

$$\begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ 3x^2 - 10xy + 3y^2 - 2x - 2y - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -x - 1 \\ 8x^2 + 8x + 1 = 0, \end{cases}$$

vediamo che la retta $x + y + 1 = 0$ è l'asse trasverso e che i vertici sono i punti $V_1 = (\frac{-2+\sqrt{2}}{4}, \frac{-2-\sqrt{2}}{4})$ e $V_2 = (\frac{-2-\sqrt{2}}{4}, \frac{-2+\sqrt{2}}{4})$.

Cerchiamo i fuochi. Essi sono l'intersezione tra la circonferenza di centro C e raggio $c = \frac{\sqrt{5}}{4}$ e l'asse trasverso:

$$\begin{cases} (x + \frac{1}{2})^2 + (y + \frac{1}{2})^2 = \frac{5}{16} \\ x + y + 1 = 0, \end{cases}$$

da cui si ottengono i fuochi $F_1 = (-\frac{1}{2} + \frac{5}{8}\sqrt{2}, -\frac{1}{2} - \frac{5}{8}\sqrt{2})$ e $F_2 = (-\frac{1}{2} - \frac{5}{8}\sqrt{2}, -\frac{1}{2} + \frac{5}{8}\sqrt{2})$.

Per ottenere le direttrici dobbiamo prima trovare i punti A e B intersezione tra la circonferenza di centro C e raggio $\frac{a^2}{c} = 4\sqrt{5}$ e l'asse trasverso:

$$\begin{cases} (x + \frac{1}{2})^2 + (y + \frac{1}{2})^2 = 80 \\ x + y + 1 = 0, \end{cases}$$

da cui abbiamo $A = (-\frac{1}{2} + 2\sqrt{10}, -\frac{1}{2} - 2\sqrt{10})$ e $B = (-\frac{1}{2} - 2\sqrt{10}, -\frac{1}{2} + 2\sqrt{10})$. Le direttrici sono le rette perpendicolari alla retta $x + y + 1 = 0$ e passanti per A e per B, cioè sono le rette $x - y - 4\sqrt{10} = 0$ e $x - y + 4\sqrt{10} = 0$.

3) La retta assegnata ha parametri direttori $(1, 0, 1)$, per cui la generica retta per P ha equazioni:

$$\begin{cases} x = 1 + lt \\ y = mt \\ z = 1 + nt \end{cases}$$

e forma un angolo di $\frac{\pi}{4}$ con la retta data se:

$$\frac{l+n}{\sqrt{2}\sqrt{l^2+m^2+n^2}} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow m^2 = 2ln.$$

Eliminando i parametri l, m, n dalle equazioni della retta per P, troviamo il luogo cercato:

$$y^2 = 2(x-1)(z-1) \Rightarrow y^2 - 2xz + 2x + 2z - 2 = 0.$$

Le matrici associate sono tali che $|B| = 0$ e $|A| = -1 \neq 0$. Deduciamo che la quadrica trovata è un cono.