CdL in Ingegneria Informatica - Ingegneria Elettronica (P-Z)
Ingegneria delle Telecomunicazioni

Prova scritta di **Algebra lineare e Geometria**- 28 Gennaio 2014

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.

I

È data l'applicazione lineare $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da:

$$\begin{aligned} f(2,1,1) &= (2h+2, h+1, h+3) \\ f(1,0,1) &= (h+1, h+1, h+1) \\ f(0,1,1) &= (2, h-1, h+1) \end{aligned}$$

al variare di $h \in \mathbb{R}$.

1) Studiare f al variare di $h \in \mathbb{R}$, determinando in ciascun caso Ker f e Im f.

2) Dato $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0\}$, calcolare $f(V)$, al variare di $h \in \mathbb{R}$, specificandone in ciascun caso la dimensione.

3) Nel caso $h = -1$ studiare la semplicità di f, determinando, se possibile, una base di autovettori. Determinare il valore di h per il quale $(4,-1,-3)$ risulta essere un autovettore.

4) Nel caso $h = 1$ determinare l'applicazione $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $\ker g = \ker f$ e $V_2 = \operatorname{Im} f$. Studiare la semplicità di g.

Soluzione

1) Da:

$$\begin{aligned} f(2,1,1) &= (2h+2, h+1, h+3) \\ f(1,0,1) &= (h+1, h+1, h+1) \\ f(0,1,1) &= (2, h-1, h+1) \end{aligned}$$

segue che:

$$\begin{aligned} f(e_1) &= (h,1,1) \\ f(e_2) &= (1,-1,1) \\ f(e_3) &= (1,h,h), \end{aligned}$$

per cui:

$$M(f) = \begin{pmatrix} h & 1 & 1 \\ 1 & -1 & h \\ 1 & 1 & h \end{pmatrix}.$$

Dal momento che $|M(f)| = -2h^2 + 2$, concludiamo che per $h \neq 1, -1$ f è un isomorfismo, cioè è iniettiva e suriettiva. Dunque, $\ker f = \{(0,0,0)\}$ e $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^3$.

Sia $h = 1$. In tal caso:

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xmapsto{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi, $\dim \operatorname{Im} f = \rho(M(f)) = 2$ e una base di $\operatorname{Im} f$ è $[(1,1,1),(1,-1,1)]$. Inoltre, $\dim \operatorname{Ker} f = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \operatorname{Im} f = 1$ e:

$$\operatorname{Ker} f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0,\, 2x+2z=0\} = \mathscr{L}((1,0,-1)).$$

Sia $h = -1$. In tal caso:

$$M(f) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xmapsto{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi, $\dim \operatorname{Im} f = \rho(M(f)) = 2$ e una base di $\operatorname{Im} f$ è $[(-1,1,1),(1,-1,1)]$. Inoltre, $\dim \operatorname{Ker} f = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \operatorname{Im} f = 1$ e:

$$\operatorname{Ker} f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid -x+y+z=0,\, 2y=0\} = \mathscr{L}((1,0,1)).$$

2) Dal momento che $V = \mathscr{L}((1,0,-1),(0,1,-1)$, si ha $f(V) = \mathscr{L}(f(1,0,-1), f(0,1,-1))$. Dato che:

$$\begin{pmatrix} h & 1 & 1 \\ 1 & -1 & h \\ 1 & 1 & h \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h-1 \\ 1-h \\ 1-h \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} h & 1 & 1 \\ 1 & -1 & h \\ 1 & 1 & h \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1-h \\ 1-h \end{pmatrix},$$

vediamo che $f(V) = \mathscr{L}((h-1,1-h,1-h),(0,-1-h,1-h))$. Inoltre, da:

$$\begin{pmatrix} h-1 & 1-h & 1-h \\ 0 & -1-h & 1-h \end{pmatrix}$$

è evidente che $\dim f(V) = 2$ per $h \neq 1$ e che $\dim f(V) = 1$ per $h = 1$.

3) Si $h = -1$. In tal caso:

$$P(T) = \begin{vmatrix} -1-T & 1 & 1 \\ 1 & -1-T & -1 \\ 1 & 1 & -1-T \end{vmatrix} = -T(T+1)(T+2).$$

Quindi, gli autovalori sono $0, -1, -2$ e, essendo tutti di molteplicità algebrica 1, deduciamo subito che f è semplice. Cerchiamo la base di autovettori. Sappiamo che $V_0 = \operatorname{Ker} f = \mathscr{L}((1,0,1))$.
Sia $T = -1$. Allora:

$$M(f_{-1}) = M(f) + I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xmapsto{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

per cui:

$$V_{-1} = \ker(f_{-1}) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y+z=0,\, x-z=0\} = \mathscr{L}((1,-1,1)).$$

Sia $T = -2$. Allora:

$$M(f_{-2}) = M(f) + 2I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xmapsto{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

per cui:

$$V_{-2} = \ker(f_{-2}) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0,\, 2x+2y=0\} = \mathscr{L}((1,-1,0)).$$

Dunque, per $h = -1$ una base di autovettori è $[(1,0,1),(1,-1,1),(1,-1,0)]$.

Nel caso generale, da:

$$\begin{pmatrix} h & 1 & 1 \\ 1 & -1 & h \\ 1 & 1 & h \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4h-4 \\ 5-3h \\ 3-3h \end{pmatrix},$$

vediamo che $f(4,-1,-3) = (4h-4, 5-3h, 3-3h)$. Quindi, $(4,-1,-3)$ è un autovettore se $(4h-4, 5-3h, 3-3h) = \lambda(4,-1,-3)$ per qualche λ:

$$\begin{cases} 4h-4 = 4\lambda \\ 5-3h = -\lambda \\ 3-3h = -3\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = h-1 \\ \lambda = 3h-5 \\ \lambda = h-1 \end{cases} \Rightarrow h-1 = 3h-5 \Rightarrow h = 2.$$

Dunque, $(4,-1,-3)$ è un autovettore per $h = 2$.

4) L'applicazione g è ben definita dalle relazioni:

$$g(1,0,-1) = (0,0,0)$$
$$g(1,1,1) = (2,2,2)$$
$$g(1,-1,1) = (2,-2,2).$$

È inoltre evidente che $[(1,0,-1),(1,1,1),(1,-1,1)]$ è una base di autovettori per g, per cui g è semplice.

II

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1) Dati la retta $r\colon 2x + y = z - 1 = 0$ e il piano $\pi\colon x + y - z = 0$, determinare la retta r' simmetrica di r rispetto al piano π.

2) Determinare e studiare il fascio di coniche del piano $z = 0$ tangenti in $A = (1,0)$ alla retta $x - 1 = 0$ e nell'origine $O = (0,0)$ alla retta $2x + y = 0$. Determinare il centro di simmetria dell'iperbole equilatera del fascio.

3) Classificare, al variare di $h \in \mathbb{R}$, le quadriche di equazione:

$$x^2 - 2xy + 2hxz + 2z^2 + 2y - 2z + 1 = 0.$$

Soluzione

1) Si vede facilmente che $r \cap \pi = \{P\}$, con $P = (-1,2,1)$. Sia $Q = (0,0,1) \in r$. La retta s passante per Q e perpendicolare a π ha equazioni:

$$s\colon \begin{cases} x - y = 0 \\ y + z - 1 = 0. \end{cases}$$

Inoltre:

$$s \cap \pi = \{H\}\colon \begin{cases} x - y = 0 \\ y + z - 1 = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow H = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right).$$

Il punto $Q' = (a,b,c)$ simmetrico di Q rispetto al piano π è tale che H è il punto medio di Q e Q'. Quindi:

$$\begin{cases} \frac{a}{2} = \frac{1}{3} \\ \frac{b}{2} = \frac{1}{3} \\ \frac{c+1}{2} = \frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{2}{3} \\ b = \frac{2}{3} \\ c = \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Quindi, $Q' = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})$. La retta $r' = QQ'$ ha equazioni:

$$\begin{cases} 4x + 5y - 6 = 0 \\ 2x + 5z - 3 = 0. \end{cases}$$

2) Il fascio di coniche ha equazione:

$$(x-1)(2x+y)+hy^2=0$$

e le matrici associate sono:

$$B=\begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & h & -\frac{1}{2} \\ -1 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A=\begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & h \end{pmatrix}.$$

Sappiamo già che le uniche coniche spezzate sono le due utilizzate per scrivere l'equazione del fascio, per cui possiamo dire che certamente $|B| \neq 0$ per $h \neq 0$. Inoltre, $|A| = 2h - \frac{1}{4}$. Quindi, per $h > \frac{1}{8}$ abbiamo delle ellissi; non ci sono circonferenze nel fascio. Per $h = \frac{1}{8}$ abbiamo una parabola. Per $h < \frac{1}{8}$, $h \neq 0$, abbiamo delle iperboli; per $h = -2$ abbiamo un'iperbole equilatera.

Il centro di simmetria dell'iperbole equilatera si trova risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} 2x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2} = 0 \\ \frac{1}{2}x - 2y - \frac{1}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{17} \\ y = -\frac{3}{17}. \end{cases}$$

Quindi, il centro di simmetria è $C = (\frac{5}{17}, -\frac{3}{17})$.

3) Le matrici associate alle quadriche sono:

$$B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & h & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ h & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & h \\ -1 & 0 & 0 \\ h & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Si vede che $|B| = h^2 - 2h - 3 = (h-3)(h+1)$ e che $|A| = -2$. Quindi, possiamo subito dire che per $h = -1$ e $h = 3$ abbiamo due coni. Inoltre, $P_A(T) = -T^3 + 3T^2 + (h^2-1)T - 2$, per cui per $h \neq -1, 3$ le quadriche sono tutti iperboloidi. In particolare, per $h < -1$ e $h > 3$ abbiamo degli iperboloidi iperbolici, mentre per $-1 < h < 3$ abbiamo degli iperboloidi ellittici.