CdL in Ingegneria Informatica - Ingegneria Elettronica (P-Z) -Ingegneria REA

Prova scritta di **Algebra lineare e Geometria**- 20 Giugno 2014

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.

Compito A

I

È data, al variare di $h \in \mathbb{R}$, la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -h \\ 1 & h & 1 \\ -h-1 & h+1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e l'applicazione lineare $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ tale che $M(f) = A$.

1) Studiare f al variare di $h \in \mathbb{R}$, determinando in ciascun caso $\operatorname{Ker} f$ e $\operatorname{Im} f$.

2) Calcolare $f^{-1}(1,1,0,0)$, al variare di $h \in \mathbb{R}$.

3) Sia $h = 0$. Data l'applicazione lineare $g\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ tale che $M(g) = {}^tA$, studiare la semplicità dell'endomorfismo $\varphi = g \circ f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, determinando, se possibile, una base di autovettori e diagonalizzando $M(\varphi)$.

4) Nel caso $h = 0$, dati l'endomorfismo $\psi = f \circ g\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ e $V = \mathscr{L}((1,0,-1,0),(0,1,0,1))$, mostrare che la restrizione $\psi|_V$ induce un endomorfismo semplice ϕ di V. Determinare una base di autovettori di ϕ.

*S*oluzione

1) Consideriamo il seguente minore di $M(f)$:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -h \\ 1 & h & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = h(h+1).$$

Esso è non nullo per $h \neq 0, -1$, per cui per questi valori di h concludiamo che $\rho(M(f)) = 3$ e che $\dim \operatorname{Im} f = 3$. In particolare, una base di $\operatorname{Im} f$ è $[(1,1,-h-1,0),(-1,h,h+1,0),(-h,1,0,1)]$. Inoltre, si ha $\dim \operatorname{Ker} f = 0$, per cui $\operatorname{Ker} f = \{(0,0,0)\}$ e f è initettiva.

Sia $h = 0$. In tal caso:

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{\text{riducendo}}{\longmapsto} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque, $\rho(M(f)) = 2$ e $\dim \operatorname{Im} f = 2$. Una sua base è $[(1,1,-1,1),(-1,0,1,0)]$. Inoltre, $\dim \operatorname{Ker} f = 1$ e:

$$\operatorname{Ker} f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y = 0,\ x - z = 0\} = \mathscr{L}((1,1,-1)).$$

Sia $h=-1$. In tal caso:

$$M(f)=\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&-1&1\\0&0&0\\1&0&1\end{pmatrix}\overset{\text{riducendo}}{\longmapsto}\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&0&0\\0&0&0\\1&0&1\end{pmatrix}.$$

Dunque, $\rho(M(f))=2$ e $\dim \operatorname{Im} f=2$. Una sua base è $[(1,1,0,1),(-1,-1,0,0)]$. Inoltre, $\dim \operatorname{Ker} f=1$ e:

$$\operatorname{Ker} f=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x-y+z=0,\ x+z=0\}=\mathscr{L}((1,0,-1)).$$

2) Per calcolare $f^{-1}(1,1,0,0)$ occorre risolvere il sistema la cui matrice completa è:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&-h&1\\1&h&1&1\\-h-1&h+1&0&0\\1&0&1&0\end{array}\right)\overset{\text{riducendo},\ h\neq-1}{\longmapsto}\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&-h&1\\1+h&0&1-h^2&1+h\\0&0&-h(h+1)&h+1\\0&0&0&0\end{array}\right).$$

Quindi, per $h\neq 0,-1$ il sistema ammette una sola soluzione:

$$f^{-1}(1,1,0,0)=\left\{\left(\frac{1}{h},\frac{1}{h},-\frac{1}{h}\right)\right\}.$$

Per $h=0$ il sistema è impossibile, per cui $f^{-1}(1,1,0,0)=\emptyset$.

Per $h=-1$ abbiamo:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&1\\1&-1&1&1\\0&0&0&0\\1&0&1&0\end{array}\right)\overset{\text{riducendo}}{\longmapsto}\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&0&1&0\end{array}\right).$$

Dunque:

$$f^{-1}(1,1,0,0)=\{(x,-1,-x)\in\mathbb{R}^3\}.$$

3) Sia $h=0$. Dal momento che $M(g)={}^{\mathrm{t}}A$, si ha:

$$M(\varphi)={}^{\mathrm{t}}A\cdot A=\begin{pmatrix}4&-2&2\\-2&2&0\\2&0&2\end{pmatrix}.$$

Inoltre:

$$P(T)=\begin{vmatrix}4-T&-2&2\\-2&2-T&0\\2&0&2-T\end{vmatrix}=T(2-T)(T-6),$$

per cui gli autovalori sono 0, 2 e 6. Essendo tutti di molteplicità algebrica 1, φ è semplice. Calcoliamo una base di autovettori.

$V_0=\operatorname{Ker}\varphi$ e:

$$M(\varphi)=\begin{pmatrix}4&-2&2\\-2&2&0\\2&0&2\end{pmatrix}\overset{\text{riducendo}}{\longmapsto}\begin{pmatrix}4&-2&2\\-2&2&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

per cui $V_0=\operatorname{Ker}\varphi=\mathscr{L}(1,1,-1)$. $V_2=\operatorname{Ker}\varphi_2$ e:

$$M(\varphi_2)=M(\varphi)-2I=\begin{pmatrix}2&-2&2\\-2&0&0\\2&0&0\end{pmatrix}\overset{\text{riducendo}}{\longmapsto}\begin{pmatrix}2&-2&2\\-2&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

per cui $V_2 = \mathscr{L}((0,1,1))$. $V_6 = \operatorname{Ker}\varphi_6$ e:

$$M(\varphi_6) = M(\varphi) - 6I = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 \\ -2 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix} \overset{\text{riducendo}}{\longmapsto} \begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 \\ -2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

per cui $V_6 = \mathscr{L}((2,-1,1))$. Dunque, la base di autovettori cercata è $\mathscr{A} = [(1,1,-1),(0,1,1),(2,-1,1)]$. Inoltre, sappiamo che:

$$M^{\mathscr{A}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

e che, posto:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

si ha:

$$P^{-1}M(\varphi)P = M^{\mathscr{A}}(\varphi).$$

4) È chiaro che:

$$M(\psi) = M(f) \cdot M(g) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

e si verifica facilmente che $\psi(1,0,-1,0) = (4,2-4,2)$ e $\psi(0,1,0,1) = (2,4,-2,4)$. Inoltre:

$$\begin{aligned} \psi(1,0,-1,0) &= (4,2,-4,2) = 4(1,0,-1,0) + 2(0,1,0,1) \\ \psi(0,1,0,1) &= (2,4,-2,4) = 2(1,0,-1,0) + 4(0,1,0,1). \end{aligned}$$

Quindi, $\psi(V) \subseteq V$, per cui $\psi|_V$ induce un endomorfismo ϕ di V. Detta $\mathscr{B} = [(1,0,-1,0),(0,1,0,1)]$, allora si ha:

$$M^{\mathscr{B}}(\phi) = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Quindi, $P(T) = (T-2)(T-6)$. $V_2 = \operatorname{Ker}\phi_2$ e:

$$M(\phi_2) = M(\phi) - 2I = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix},$$

per cui $V_2 = \mathscr{L}((1,0,-1,0) - (0,1,0,1)) = \mathscr{L}((1,-1,-1,-1))$. $V_6 = \operatorname{Ker}\phi_6$ e:

$$M(\phi_6) = M(\phi) - 6I = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix},$$

per cui $V_6 = \mathscr{L}((1,0,-1,0) + (0,1,0,1)) = \mathscr{L}((1,1,-1,1))$. Dunque, una base di autovettori per ϕ è $[(1,-1,-1,-1),(1,1,-1,1)]$.

II

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1) Dati il piano $\pi\colon x - y + 2z - 1 = 0$, la retta $r\colon x + y = y + z = 0$ e il punto $P = (1,2,-1)$, determinare la retta s parallela al piano π, incidente la retta r e passante per P. Calcolare $d(r,\pi)$ e $d(s,\pi)$.

2) Determinare e studiare il fascio di coniche del piano $z = 0$ tangenti alle rette $x - y + 1 = 0$ e $x - y - 1 = 0$ nei punti in cui esse incontrano la retta $x + y = 0$. Mostrare che le coniche irriducibili del fascio hanno tutte lo stesso centro e gli stessi assi di simmetria.

3) Determinare e studiare, al variare di $h \in \mathbb{R}$, le quadriche di equazione:

$$x^2 + 2xy + 2y^2 + hz^2 - 2hz + 1 = 0.$$

Soluzione

1) Il piano α parallelo a π e passante per P ha equazione:

$$(x-1) - (y-2) + 2(z+1) = 0 \Rightarrow x - y + 2z + 3 = 0.$$

Cerchiamo il piano β contenente r e passante per P:

$$\lambda(x+y) + \mu(y+z) = 0 \Rightarrow \mu = -3\lambda.$$

Dunque, $\beta\colon x - 2y - 3z = 0$. Quindi:

$$s = \alpha \cap \beta\colon \begin{cases} x - y + 2z + 3 = 0 \\ x - 2y - 3z = 0. \end{cases}$$

La retta r ha parametri direttori $(1, -1, 1)$, per cui $(1, -1, 1)$ sono le componenti di un vettore parallelo alla retta. $(1, -1, 2)$ sono le componenti di un vettore perpendicolare al piano π. Si verifica facilmente che questi vettori non sono perpendicolari tra loro, per cui r e π non sono paralleli, il che implica che r e π sono incidenti. Dunque, $d(r, \pi) = 0$. Inoltre, dato che s è parallela a π, concludiamo che:

$$d(s, \pi) = d(r, \pi) = \frac{|1 - 2 - 2 - 1|}{\sqrt{1+1+4}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}.$$

2) Il fascio di coniche ha equazione:

$$(x - y + 1)(x - y - 1) + h(x+y)^2 = 0 \Rightarrow (h+1)x^2 + (2h-2)xy + (h+1)y^2 - 1 = 0.$$

Sappiamo che ci sono solo due coniche spezzate distinte, per cui $|B| = 0$ solo per $h = 0$. Inoltre:

$$|A| = \begin{vmatrix} h+1 & h-1 \\ h-1 & h+1 \end{vmatrix} = 4h.$$

Quindi, per $h > 0$ abbiamo delle ellissi; in particolare, per $h = 1$ abbiamo una circonferenza. Per $h < 0$ abbiamo delle iperboli; in particolare, per $h = -1$ abbiamo un'iperbole equilatera. Non ci sono parabole nel fascio.

Il centro delle generica conica del fascio si ottiene risolvendo il seguente sistema:

$$\begin{cases} (h+1)x + (h-1)y = 0 \\ (h-1)x + (h+1)y = 0, \end{cases}$$

per cui $C = (0, 0)$ per la generica conica del fascio. Per quel che riguarda gli assi di simmetria, dobbiamo calcolare gli autovalori di A:

$$P_A(T) = \begin{vmatrix} h+1-T & h-1 \\ h-1 & h+1-T \end{vmatrix} = (2h - T)(2 - T).$$

Gli autospazi associati hanno equazioni $x - y = 0$ e $x + y = 0$. Dal momento che essi passano per il centro $C = (0, 0)$, le rette $x - y = 0$ e $x + y = 0$ sono gli assi di simmetria della generica conica del fascio.

3) Le matrici associate sono:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h & -h \\ 0 & 0 & -h & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & h \end{pmatrix}.$$

Dunque, $|B| = h - h^2$ e $|A| = h$. Allora, per $h = 1$ abbiamo un cono e per $h = 0$, notando che $\rho(B) = 3$, abbiamo un cilindro. Sia $h \neq 0, 1$. Si vede che $P_A(T) = (h - T)(T^2 - 3T + 1)$. Questo significa che per $h > 0$ gli autovalori hanno tutti lo stesso segno, cioè per $h > 0$ abbiamo degli ellissoidi e per $h < 0$ degli iperboloidi. Dunque, per $h < 0$ si ha $|B| < 0$ e $|A| \neq 0$ e abbiamo iperboloidi ellittici. Per $0 < h < 1$ si ha $|B| > 0$ e $|A| \neq 0$, per cui abbiamo degli ellissoidi immaginari. Per $h > 1$ si ha $|B| < 0$ e $|A| \neq 0$, per cui abbiamo degli ellissoidi reali.