CdL in Ingegneria Informatica - Ingegneria Elettronica (P-Z)

Prova scritta di **Algebra lineare e Geometria**- 20 Febbraio 2014

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.

I

È data l'applicazione lineare $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che:

$$M(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & h & 0 \\ 1 & h & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

al variare di $h \in \mathbb{R}$.

1) Studiare f al variare di $h \in \mathbb{R}$, determinando in ciascun caso $\operatorname{Ker} f$ e $\operatorname{Im} f$ e le loro equazioni cartesiane.
2) Dato $V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid y - z = 0\}$, calcolare $f^{-1}(V)$, al variare di $h \in \mathbb{R}$, specificandone in ciascun caso la dimensione. Mostrare che $V \subseteq f^{-1}(V)$ per ogni $h \in \mathbb{R}$.
3) Data la base $\mathcal{B} = [(1, 0, 0, 1), (1, 0, 0, -1), (0, 1, 1, 0), (0, 1, -1, 0)]$ di $\mathbb{R}^4$, determinare $M^{\mathcal{B}}(f)$.
4) Studiare la semplicità di f, al variare di $h \in \mathbb{R}$.

Soluzione

1) Dal momento che $|M(f)| = 3(1 - h^2)$, osserviamo subito che per $h \neq \pm 1$ f è un isomorfismo, cioè f è iniettiva e suriettiva. In particolare, $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^4$ e $\operatorname{Ker} f = \{(0, 0, 0, 0)\}$.

   Sia $h = 1$. In tal caso:

$$M(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xmapsto{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

   per cui $\dim \operatorname{Im} f = \rho(M(f)) = 3$ e una sua base è $[(2, 1, 1, 1), (0, 1, 1, 0), (1, 0, 0, 2)]$. Si vede che:

$$\operatorname{Im} f = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid y - z = 0\}.$$

   Inoltre, $\dim \operatorname{Ker} f = \dim \mathbb{R}^4 - \dim \operatorname{Im} f = 1$ e abbiamo:

$$\operatorname{Ker} f = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x + t = 0,\ x + y + z = 0,\ -3x = 0\} = \mathscr{L}((0, 1, -1, 0)).$$

   Sia $h = -1$. In tal caso:

$$M(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xmapsto{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

   per cui $\dim \operatorname{Im} f = \rho(M(f)) = 3$ e una sua base è $[(2, 1, 1, 1), (0, 1, -1, 0), (1, 0, 0, 2)]$. Si vede che:

$$\operatorname{Im} f = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 4x - 3y - 3z - 2t = 0\}.$$

   Inoltre, $\dim \operatorname{Ker} f = \dim \mathbb{R}^4 - \dim \operatorname{Im} f = 1$ e abbiamo:

$$\operatorname{Ker} f = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x + t = 0,\ x + y - z = 0,\ 2x = 0\} = \mathscr{L}((0, 1, 1, 0)).$$

2) Da:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & h & 0 \\ 1 & h & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+t \\ x+y+hz \\ x+hy+z \\ x+2t \end{pmatrix}$$

vediamo che:

$$f(x,y,z,t) = (2x+t, x+y+hz, x+hy+z, x+2t).$$

Dunque:

$$f^{-1}(V) = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid f(x,y,z,t) \in V\} = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid (1-h)(y-z) = 0\}.$$

Quindi, per $h \neq 1$ $f^{-1}(V) = V$ e $\dim f^{-1}(V) = 3$. Per $h = 1$ $f^{-1}(V) = \mathbb{R}^4$, per cui ovviamente $\dim f^{-1}(V) = 4$. In particolare, è ovvio che $V \subseteq f^{-1}(V)$ per ogni $h \in \mathbb{R}$.

3) Dal momento che:

$$\begin{aligned} [f(1,0,0,1)]_{\mathscr{B}} &= [(3,1,1,3)]_{\mathscr{B}} = (3,0,1,0) \\ [f(1,0,0,-1)]_{\mathscr{B}} &= [(1,1,1,-1)]_{\mathscr{B}} = (0,1,1,0) \\ [f(0,1,1,0)]_{\mathscr{B}} &= [(0,h+1,h+1,0)]_{\mathscr{B}} = (0,0,h+1,0) \\ [f(0,1,-1,0)]_{\mathscr{B}} &= [(0,1-h,h-1,0)]_{\mathscr{B}} = (0,0,0,1-h), \end{aligned}$$

vediamo che:

$$M^{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & h+1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-h \end{pmatrix}.$$

4) Da:

$$P(T) = \begin{vmatrix} 3-T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-T & 0 & 0 \\ 1 & 1 & h+1-T & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-h-T \end{vmatrix} = (3-T)(1-T)(h+1-T)(1-h-T)$$

vediamo che gli autovalori sono $T = 1$, 3, $h+1$, $1-h$. Per $h \neq 0, 2, -2$ essi sono tutti di molteplicità algebrica 1, per cui f in questo caso è semplice.

Sia $h = 0$. In tal caso gli autovalori sono 1 e 3, con $m_1 = 3$ e $m_3 = 1$. f sarà semplice se $\dim V_1 = m_1 = 3$:

$$M^{\mathscr{B}}(f) - I = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{\text{riducendo}}{\longmapsto} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dunque, $\dim V_1 = \dim \mathbb{R}^4 - \rho(M^{\mathcal{B}}(f) - I) = 4 - 2 = 2 < 3 = m_1$, per cui per $h = 0$ f non è semplice.

Sia $h = 2$. In tal caso gli autovalori sono 1, -1 e 3, con $m_1 = 1$, $m_{-1} = 1$ e $m_3 = 2$. f sarà semplice se $\dim V_3 = m_3 = 2$:

$$M^{\mathscr{B}}(f) - 3I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \overset{\text{riducendo}}{\longmapsto} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Dunque, $\dim V_3 = \dim \mathbb{R}^4 - \rho(M^{\mathcal{B}}(f) - 3I) = 4 - 3 = 1 < 2 = m_3$, per cui per $h = 2$ f non è semplice.

Sia $h = -2$. In tal caso gli autovalori sono 1, -1 e 3, con $m_1 = 1$, $m_{-1} = 1$ e $m_3 = 2$. f sarà semplice se $\dim V_3 = m_3 = 2$:

$$M^{\mathscr{B}}(f) - 3I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xmapsto{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dunque, $\dim V_3 = \dim \mathbb{R}^4 - \rho(M^{\mathcal{B}}(f) - 3I) = 4 - 2 = 2 = m_3$, per cui per $h = -2$ f è semplice.

II

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1) Dati la retta $r_1\colon x - y = y + z = 0$, la retta $r_2\colon x + y - z = 2x - y + z = 0$ e il piano $\pi\colon x + 2y - z + 4 = 0$, determinare il punto P intersezione di r_1 e π, la retta s passante per P e parallela a r_2 e la retta t passante per P, perpendicolare a r_2 e parallela a π.

2) Studiare il fascio di coniche del piano $z = 0$ di equazione:
$$x^2 + (h+1)xy + y^2 - h - 3 = 0,$$
determinando in particolare punti base e coniche spezzate.

3) Determinare il cilindro di vertice il punto $V = (1, -1, 1, 0)$ e direttrice la conica Γ di equazioni:
$$\Gamma\colon \begin{cases} x^2 - xy + 2y^2 - 1 = 0 \\ z = 0. \end{cases}$$

Soluzione

1) Si vede facilmente che $P = (-1, -1, 1)$ e che la retta r_2 ha parametri direttori $(0, 1, 1)$. Dunque:
$$s\colon \begin{cases} x = -1 \\ y + 1 = z - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y - z + 2 = 0. \end{cases}$$
Inoltre, se (l, m, n) sono parametri direttori di t, deve essere:
$$\begin{cases} m + n = 0 \\ l + 2m - n = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n = -m \\ l = -3m, \end{cases}$$
per cui:
$$t\colon \frac{x+1}{3} = \frac{y+1}{-1} = z - 1 \Rightarrow \begin{cases} x - 3z + 4 = 0 \\ y + z = 0. \end{cases}$$

2) Le matrici associate al fascio di coniche sono:
$$B = \begin{pmatrix} 1 & \frac{h+1}{2} & 0 \\ \frac{h+1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -h-3 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{h+1}{2} \\ \frac{h+1}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$
Dunque, $|B| = \frac{1}{4}(-h-3)(-h^2 - 2h + 3)$ e $|A| = \frac{-h^2-2h+3}{4}$. Quindi, per $h = -3$ e $h = 1$ otteniamo le coniche spezzate del fascio ed esse hanno equazioni $(x - y)^2 = 0$ e $(x + y - 2)(x + y + 2) = 0$. I punti base sono $(2, 2)$ e $(-2, -2)$, entrambi contati due volte. Per $h < -3$ e $h > 1$ si ha $|A| < 0$, per cui abbiamo delle iperboli. Per $h = \infty$ abbiamo l'iperbole equilatera $xy - 1 = 0$. Per $-3 < h < 1$ abbiamo $|A| > 0$, per cui abbiamo delle ellissi (ovviamente tutte reali) e, in particolare, per $h = -1$ abbiamo una circonferenza. Non ci sono parabole nel fascio.

3) Sia $P = (\alpha, \beta, 0) \in \Gamma$. Dunque, deve essere $\alpha^2 - \alpha\beta + 2\beta^2 - 1 = 0$. Inoltre:
$$PV\colon x - \alpha = -(y - \beta) = z \Rightarrow \begin{cases} \alpha = x - z \\ \beta = y + z. \end{cases}$$
Sostituendo in $\alpha^2 - \alpha\beta + 2\beta^2 - 1 = 0$ troviamo l'equazione del cilindro:
$$(x - z)^2 - (x - z)(y + z) + 2(y + z)^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 + 2y^2 + 4z^2 - xy - 3xz + 5yz - 1 = 0.$$