CdL in Ingegneria Informatica - Ingegneria Elettronica (P-Z) -Ingegneria REA

Prova scritta di **Algebra lineare e Geometria**- 11 Settembre 2014

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.

I

Sono dati in $\mathbb{R}^4$ i vettori $v_1 = (1,0,1,1)$, $v_2 = (1,1,0,0)$, $v_3 = (0,1,0,0)$, $w_1 = (1,0,1,0)$, $w_2 = (0,1,1,0)$ e $w_3 = (1,0,0,1)$ e gli spazi vettoriali $V = \mathscr{L}(v_1, v_2, v_3)$ e $W = \mathscr{L}(w_1, w_2, w_3)$. È assegnata l'applicazione lineare $f\colon V \to W$ determinata da:

$$\begin{aligned} f(v_1) &= w_1 + w_2 + 2w_3 \\ f(v_2) &= 2w_1 - w_2 + w_3 \\ f(v_3) &= 8w_2 + 8w_3. \end{aligned}$$

1) Studiare f, determinando $\operatorname{Ker} f$ e $\operatorname{Im} f$ e le loro equazioni cartesiane.

2) Dati i vettori $t_1 = w_1 + w_3$ e $t_2 = w_2 + w_3$ e dato lo spazio $T = \mathscr{L}(t_1, t_2)$, mostrare che $T \subseteq V$ e che $T = \operatorname{Im} f$.

3) Mostrare che la restrizione $f|_T$ induce un endomorfismo $g\colon T \to T$. Studiare la semplicità di g, determinando, se possibile, una base di autovettori.

4) Dato $Z = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid hx + y - 2z = 0,\ z - ht = 0\}$, determinare $Z + T$, al variare di $h \in \mathbb{R}$, specificando se la somma è diretta o meno.

*S*oluzione

1) È semplice verificare che v_1, v_2, v_3 sono linearmente indipendenti, così come w_1, w_2, w_3, per cui $\mathscr{A} = [v_1, v_2, v_3]$ è una base di V e $\mathscr{B} = [w_1, w_2, w_3]$ è una base di W. Inoltre, si ha immediatamente:

$$M^{\mathscr{A},\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 8 \\ 2 & 1 & 8 \end{pmatrix} \xmapsto{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque, $\dim \operatorname{Im} f = \rho(M^{\mathscr{A},\mathscr{B}}(f)) = 2$ e si ha:

$$\operatorname{Im} f = \mathscr{L}(w_1 + w_2 + 2w_3, 2w_1 - w_2 + w_3) = \mathscr{L}((3,1,2,2), (3,-1,1,1)).$$

Si ottiene facilmente che:

$$\operatorname{Im} f = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y - 2z = 0,\ z - t = 0\}.$$

Inoltre, $\dim \operatorname{Ker} f = \dim V - \dim \operatorname{Im} f = 1$ e:

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker} f = \{v \in V \mid [v]_{\mathscr{A}} = (a,b,c),\ a + 2b = 0,\ -3b + 8c = 0\} = \\ = \mathscr{L}((-16,8,3)_{\mathscr{A}}) = \mathscr{L}(-16v_1 + 8v_2 + 3v_3) = \mathscr{L}((-8,11,-16,-16)). \end{aligned}$$

Si vede facilmente che:

$$\operatorname{Ker} f = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid 11x + 8y = 0,\ 2x - z = 0,\ 2x - t = 0\}.$$

2) È semplice vedere che:

$$t_1 = (2,0,1,1)$$
$$t_2 = (1,1,1,1),$$

per cui $T = \mathscr{L}((1,1,1,1),(2,0,1,1))$. Dal momento che t_1 e t_2 sono linearmente indipendenti, si ha $\dim T = 2$. Inoltre, si vede che:

$$V = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid z - t = 0\}.$$

Dal momento che t_1 e t_2 verificano l'equazione cartesiana di V, allora $T \subset V$. Analogamente, si vede che t_1 e t_2 verificano entrambe le equazioni cartesiane di $\operatorname{Im} f$, per cui $T \subseteq \operatorname{Im} f$. Tuttavia, essendo $\dim T = \dim \operatorname{Im} f = 2$, allora deve essere $T = \operatorname{Im} f$.

3) $f|_T$ induce g per quanto visto al punto precedente. Sia $\mathcal{C} = [t_1, t_2]$ una base di T. Si vede che:

$$[t_1]_{\mathscr{A}} = (1,1,-1),$$

cioè $t_1 = v_1 + v_2 - v_3$ e, dunque:

$$f(t_1) = f(v_1) + f(v_2) - f(v_3) = 3w_1 - 8w_2 - 5w_3$$

Si vede che $[f(t_1)]_{\mathcal{C}} = (3,-8)$. Nello stesso modo:

$$[t_2]_{\mathscr{A}} = (1,0,1),$$

cioè $t_1 = v_1 + v_3$ e, dunque:

$$f(t_2) = f(v_1) + f(v_3) = w_1 + 9w_2 + 10w_3$$

Si vede che $[f(t_2)]_{\mathcal{C}} = (1,9)$. Dunque:

$$M^{\mathcal{C}}(g) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Dunque:

$$P(T) = \begin{vmatrix} 3-T & 1 \\ -8 & 9-T \end{vmatrix} = T^2 - 12T + 35 = (T-5)(T-7).$$

Sia $T = 7$. Allora $V_7 = \operatorname{Ker} g_7$ e:

$$M^{\mathcal{C}}(g_7) = M^{\mathcal{C}}(g) - 7I = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -8 & 2 \end{pmatrix}.$$

Dunque:

$$V_7 = \{t \in T \mid [t]_{\mathcal{C}} = (a,b),\ -4a + b = 0\} = \mathscr{L}(t_1 + 4t_2) = \mathscr{L}((6,4,5,5)).$$

Sia $T = 5$. Allora $V_5 = \operatorname{Ker} g_5$ e:

$$M^{\mathcal{C}}(g_5) = M^{\mathcal{C}}(g) - 5I = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -8 & 4 \end{pmatrix}.$$

Dunque:

$$V_5 = \{t \in T \mid [t]_{\mathcal{C}} = (a,b),\ -2a + b = 0\} = \mathscr{L}(t_1 + 2t_2) = \mathscr{L}((3,1,2,2)).$$

Quindi, una base di autovettori è $[(6,4,5,5),(3,1,2,2)]$.

4) Dal momento che:

$$T = \operatorname{Im} f = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y - 2z = 0,\ z - t = 0\},$$

allora:

$$T \cap \operatorname{Im} f = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y - 2z = 0,\ z - t = 0,\ hx + y - 2z = 0,\ z - ht = 0\}.$$

Da:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ h & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -h \end{pmatrix} \xmapsto{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ h-1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-h \end{pmatrix}$$

deduciamo che per $h \neq 1$ si ha $T \cap Z = \{(0, 0, 0, 0)\}$, per cui $\dim(T \oplus Z) = \dim T + \dim Z = 4$ e $T \oplus Z = \mathbb{R}^4$.

Per $h = 1$ si vede immediatamente che $T \cap Z = T$, per cui $T + Z = T$.

II

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1) Dati il punto $P = (1, 1, -1)$, il piano $\pi\colon x - y + z = 0$ e il vettore $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j}$, determinare la retta r passante per P, parallela a π e perpendicolare a $\vec{v}$. Determinare la retta r' simmetrica di r rispetto a π e calcolare $d(r, \pi)$ e $d(r', \pi)$.

2) Studiare il fascio di coniche del piano $z = 0$ di equazione:

$$(h + 1)x^2 - hxy + y^2 - 2hx + hy + h - 1 = 0,$$

determinando, in particolare, punti base e coniche spezzate.

3) Determinare e studiare la quadrica contenente le coniche:

$$\Gamma_1\colon \begin{cases} x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \Gamma_2\colon \begin{cases} 2y^2 + z^2 + 2yz - 1 = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

e passante per il punto $P = (-1, 0, 1)$.

Soluzione

1) Se (l, m, n) sono parametri direttori di r, deve essere:

$$\begin{cases} l - m + n = 0 \\ l + m = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = -l \\ n = -2l. \end{cases}$$

Dunque, possiamo prendere $(1, -1, -2)$ some parametri direttori, per cui:

$$r\colon x - 1 = -(y - 1) = \frac{z + 1}{-2} \Rightarrow \begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ 2x + z - 1 = 0. \end{cases}$$

Sia s la retta per P perpendicolare a π:

$$s\colon x - 1 = -(y - 1) = z + 1 \Rightarrow \begin{cases} x = -y + 2 \\ z = -y. \end{cases}$$

Dunque:

$$H = s \cap \pi\colon \begin{cases} x - y + z = 0 \\ x = -y + 2 \\ z = -y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{3} \\ y = \frac{2}{3} \\ z = -\frac{2}{3}. \end{cases}$$

Dunque, $H = (\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$. Il simmetrico $P' = (a, b, c)$ di P rispetto a H è tale che:

$$\begin{cases} \frac{a+1}{2} = \frac{4}{3} \\ \frac{b+1}{2} = \frac{2}{3} \\ \frac{c-1}{2} = -\frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{5}{3} \\ b = \frac{1}{3} \\ c = -\frac{1}{3}. \end{cases}$$

Dunque, $P' = (\frac{5}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$, per cui:

$$r' \colon x - \frac{5}{3} = -y + \frac{1}{3} = \frac{z + \frac{1}{3}}{-2} \Rightarrow \begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ 2y - z - 1 = 0. \end{cases}$$

Inoltre:

$$d(r, \pi) = d(r', \pi) = d(P, \pi) = \frac{|1 - 1 - 1|}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

2) La matrice associata al fascio di coniche è:

$$B = \begin{pmatrix} h+1 & -\frac{h}{2} & -h \\ -\frac{h}{2} & 1 & \frac{h}{2} \\ -h & \frac{h}{2} & h-1 \end{pmatrix}.$$

Si vede che $|B| = -1 \neq 0$, per cui l'unica conica spezzata è quella nascosta, che ha equazione:

$$x^2 - xy - 2x + y + 1 = 0 \Rightarrow (x - 1)(x - y - 1) = 0.$$

I punti base sono i punti comuni a tutte le coniche del fascio, per esempio alla conica spezzata e a quella che si ottiene per $h = 0$:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ (x - 1)(x - y - 1) = 0. \end{cases}$$

Dunque, essi sono $(1, 0)$ 3 volte e $(0, -1)$ 1 volta. Per quel che riguarda la classificazione delle coniche, abbiamo:

$$|A| = \begin{vmatrix} h+1 & -\frac{h}{2} \\ -\frac{h}{2} & 1 \end{vmatrix} = \frac{-h^2 + 4h + 4}{4}.$$

Dunque, per $2 - 2\sqrt{2} < h < 2 + 2\sqrt{2}$ abbiamo delle ellissi reali; in particolare, per $h = 0$ abbiamo una circonferenza. Per $h = 2 \pm 2\sqrt{2}$ abbiamo delle parabole. Per $h < 2 - 2\sqrt{2}$ e $h > 2 + 2\sqrt{2}$ abbiamo delle iperboli; in particolare, per $h = -2$ abbiamo un'iperbole equilatera.

3) Le quadriche contenenti la conica Γ_1 hanno equazione:

$$x^2 + y^2 - 1 + z(ax + by + cz + d) = 0.$$

Intersechiamo con il piano $x - y = 0$:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 1 + z(ax + by + cz + d) = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y \\ 2y^2 + (a + b)yz + cz^2 + dz - 1 = 0. \end{cases}$$

Deve essere:

$$2y^2 + (a + b)yz + cz^2 + dz - 1 = k(2y^2 + z^2 + 2yz - 1),$$

per cui:

$$\begin{cases} 2 = 2k \\ a + b = 2k \\ c = k \\ d = 0 \\ -1 = -k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = 1 \\ b = -2a \\ c = 1 \\ d = 0. \end{cases}$$

Dunque, otteniamo:

$$x^2 + y^2 + axz + (2 - a)yz + z^2 - 1 = 0.$$

Imponendo il passaggio per P otteniamo $a = 1$, per cui la quadrica cercata ha equazione:

$$x^2 + y^2 + xz + yz + z^2 - 1 = 0.$$

Si ha che $|B| = -|A| = -\frac{1}{2}$, per cui la quadrica è un ellissoide reale o un iperboloide ellittico. Dato che:

$$P_A(T) = -T^3 + 3T^2 - \frac{5}{2}T + \frac{1}{2},$$

allora la quadrica è un ellissoide.