CdL in Ingegneria Informatica - Ingegneria Elettronica (P-Z) -Ingegneria REA

Prova scritta di **Algebra lineare e Geometria**- 11 Luglio 2014

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti. Compito A

I

Sono assegnati in $\mathbb{R}^4$ i vettori $v_1 = (1,0,0,1)$, $v_2 = (0,1,0,1)$ e $v_3 = (0,0,1,-1)$, il sottospazio $V = \mathscr{L}(v_1, v_2, v_3)$ e l'endomorfismo $f\colon V \to V$ definito dalle relazioni:

$$\begin{aligned} f(v_1) &= (1,-1,-1,1) \\ f(v_2) &= (0,0,-1,1) \\ f(v_3) &= (0,2,3,-1). \end{aligned}$$

1) Verificare che f è semplice e determinare una base di autovettori.
2) Detto $g\colon V \to V$ l'endomorfismo definito dalle relazioni:
$$\begin{aligned} g(v_1) &= hv_2 \\ g(v_2) &= hv_3 \\ g(v_3) &= hv_1, \end{aligned}$$
con h parametro reale, studiare al variare di h l'endomorfismo $f+g\colon V \to V$ determinando in ciascun caso $\mathrm{Im}(f+g)$ e $\mathrm{Ker}(f+g)$.
3) Determinare l'endomorfismo $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la cui restrizione a V induce f e ha come autospazio associato all'autovalore 1 il sottospazio $V_1 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid z - t = 0\}$.

Soluzione

1) Si verifica facilmente che $\mathscr{A} = [v_1, v_2, v_3]$ è una base di V e che:
$$M^{\mathscr{A}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$
Dunque, $P(T) = (1-T)^2(2-T)$. Sappiamo che $V_1 = \mathrm{Ker}\, f_1$ e che:
$$M^{\mathscr{A}}(f_1) = M^{\mathscr{A}}(f) - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \overset{\text{riducendo}}{\longmapsto} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
Dunque, $\dim V_1 = \dim V - \rho(M^{\mathscr{A}}(f)) = 2 = m_1$. Essendo $m_2 = 1$, deve obbligatoriamente essere $\dim V_2 = 1 = m_2$, per cui sappiamo che f è semplice. Inoltre:
$$V_1 = \{v \in V \mid [v]_{\mathscr{A}} = (a,b,c),\ -a-b+2c = 0\} = \mathscr{L}(v_1 - v_3, 2v_2 + v_3) = \mathscr{L}((1,-1,0,0),(0,2,1,1)).$$
Sappiamo che $V_2 = \mathrm{Ker}\, f_2$ e che:
$$M^{\mathscr{A}}(f_2) = M^{\mathscr{A}}(f) - 2I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \overset{\text{riducendo}}{\longmapsto} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
Dunque:
$$V_2 = \{v \in V \mid [v]_{\mathscr{A}} = (a,b,c),\ -a =,\ -2b+2c = 0\} = \mathscr{L}(v_2 + v_3) = \mathscr{L}((0,1,1,0)).$$
Quindi, la base di autovettori cercata è $[(1,-1,0,0),(0,2,1,1),(0,1,1,0)]$.

2) È chiaro che:

$$M^{\mathscr{A}}(f+g) = M^{\mathscr{A}}(f) + M^{\mathscr{A}}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & h \\ h & 0 & 0 \\ 0 & h & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & h \\ h-1 & 0 & 2 \\ -1 & h-1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Dal momento che $|M^{\mathscr{A}}(f+g)| = (h-1)(h+1)(h-2)$, vediamo che per $h \neq 1, -1, 2$ $f+g$ è un isomorfismo, cioè f è iniettiva e suriettiva. In particolare, $\operatorname{Im} f = V$ e $\operatorname{Ker} f = \{(0,0,0,0)\}$.

Sia $h = 1$. In tal caso:

$$M^{\mathscr{A}}(f+g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \overset{\text{riducendo}}{\longmapsto} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque, $\dim \operatorname{Im} f = \rho(M^{\mathscr{A}}(f+g)) = 2$ e una sua base è $[v_1 - v_3, v_1 + 2v_2 + 3v_3] = [(1,0,-1,2), (1,2,3,0)]$. Inoltre, $\dim \operatorname{Ker} f = \dim V - \dim \operatorname{Im} f = 1$ e:

$$\operatorname{Ker} f = \{v \in V \mid [v]_{\mathscr{A}} = (a,b,c),\ a = 0,\ c = 0\} = \mathscr{L}(v_2) = \mathscr{L}((0,1,0,1)).$$

Sia $h = -1$. In tal caso:

$$M^{\mathscr{A}}(f+g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \overset{\text{riducendo}}{\longmapsto} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Dunque, $\dim \operatorname{Im} f = \rho(M^{\mathscr{A}}(f+g)) = 2$ e una sua base è $[v_1 - 2v_2 - v_3, -2v_3] = [(1,-2,-1,0), (0,0,-2,2)]$. Inoltre, $\dim \operatorname{Ker} f = \dim V - \dim \operatorname{Im} f = 1$ e:

$$\operatorname{Ker} f = \{v \in V \mid [v]_{\mathscr{A}} = (a,b,c),\ a - c = 0,\ -2b + 2c = 0\} = \mathscr{L}(v_1 + v_2 + v_3) = \mathscr{L}((1,1,1,1)).$$

Sia $h = 2$. In tal caso:

$$M^{\mathscr{A}}(f+g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \overset{\text{riducendo}}{\longmapsto} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Dunque, $\dim \operatorname{Im} f = \rho(M^{\mathscr{A}}(f+g)) = 2$ e una sua base è $[v_1 + v_2 - v_3, v_3] = [(1,1,-1,3), (0,0,1,-1)]$. Inoltre, $\dim \operatorname{Ker} f = \dim V - \dim \operatorname{Im} f = 1$ e:

$$\operatorname{Ker} f = \{v \in V \mid [v]_{\mathscr{A}} = (a,b,c),\ a + 2c = 0,\ b + 5c = 0\} = \mathscr{L}(-2v_1 - 5v_2 + v_3) = \mathscr{L}((-2,-5,1,-8)).$$

3) Deve essere:

$$\begin{aligned} \varphi(v_1) &= f(v_1) = (1,-1,-1,-1) \\ \varphi(v_2) &= f(v_2) = (0,0,-1,1) \\ \varphi(v_3) &= f(v_3) = (0,2,3,-1). \end{aligned}$$

Inoltre, deve essere $V_1 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid z - t = 0\}$. Prendiamo $e_1 = (1,0,0,0) \in V_1$. Si vede facilmente che $e_1 \notin V$. Dunque, le condizioni:

$$\begin{aligned} \varphi(v_1) &= f(v_1) = (1,-1,-1,-1) \\ \varphi(v_2) &= f(v_2) = (0,0,-1,1) \\ \varphi(v_3) &= f(v_3) = (0,2,3,-1) \\ \varphi(e_1) &= (1,0,0,0) \end{aligned}$$

determinano in maniera unica φ, dal momento che $[v_1, v_2, v_3, e_1]$ è una base di $\mathbb{R}^4$.

II

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1) Date le rette $r\colon y = x - z = 0$ e $s\colon z = x + 2y - 1 = 0$, determinare la retta t che le interseca entrambe ed è perpendicolare al piano $2x - z = 0$.

2) Determinare e studiare il luogo delle rette passanti per O, che formano con la retta $r\colon x - y = y - z = 0$ un angolo di $\frac{\pi}{6}$.

3) Determinare e studiare le quadriche contenenti la conica $\Gamma\colon x = y^2 - y + z = 0$, tangenti nel punto improprio dell'asse $\vec{x}$ alla retta impropria del piano $y = z$ e tangenti nell'origine al piano $y = z$.

Soluzione

1) Siano $R = (a, 0, a)$ il generico punto di r e $S = (1 - 2b, b, 0)$ il generico punto di s. La retta t cercata è una retta del tipo RS. Essa ha parametri direttori $(a + 2b - 1, -b, a)$, ma, dovendo essere t perpendicolare al piano π, essi devono essere proporzionali alla terna $(2, 0, -1)$. Dunque:

$$\begin{cases} b = 0 \\ \frac{a+2b-1}{2} = \frac{a}{-1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b = 0. \end{cases}$$

Quindi, $R = (\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3})$ e $S = (1, 0, 0)$. La retta cercata è $t = RS$:

$$\begin{cases} x + 2z - 1 = 0 \\ y = 0. \end{cases}$$

2) La generica retta passante per O ha parametri direttori $(l, m, 1)$ ed equazioni $x - lz = y - mz = 0$. Dal momento che la retta assegnata ha parametri direttori $(, 1, 1, 1)$, deve essere:

$$\pm \frac{l + m + 1}{\sqrt{l^2 + m^2 + 1}\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow 5l^2 + 5m^2 - 8lm - 8l - 8m + 5 = 0.$$

Ma $l = \frac{x}{z}$ e $m = \frac{y}{z}$, per cui operando questa sostituzione e moltiplicando per z^2 otteniamo:

$$5x^2 + 5y^2 - 8xy - 8xz - 8yz + 5z^2 = 0.$$

3) La generica quadrica contenente la conica Γ ha equazione $y^2 - y + z + x(ax + by + cz + d) = 0$. Intersechiamo tale quadrica con la retta impropria del piano $y = z$:

$$\begin{cases} y^2 - yt + zt + x(ax + by + cz + dt) = 0 \\ y = z \\ t = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z^2 + ax^2 + (b + c)xz = 0 \\ y = z \\ t = 0. \end{cases}$$

Vogliamo che la soluzione di questo sistema sia il punto improprio dell'asse $\vec{x}$, cioè $(1, 0, 0, 0)$, con molteplicità due. Dunque, deve essere $a = 0$ e $b + c = 0$. Quindi, le quadriche hanno equazione del tipo:

$$y^2 - y + z + x(by - bz + d) = 0.$$

Il piano tangente a questa quadrica nell'origine è $dx - y + z = 0$. Perché esso coincida con il piano $y = z$ deve accadere che $d = 0$. Quindi, le quadriche cercate hanno equazione:

$$y^2 + bxy - bxz + y + z = 0.$$

Le matrici associate sono:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{b}{2} & -\frac{b}{2} & 0 \\ \frac{b}{2} & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{b}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{b}{2} & -\frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{b}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dal momento che $|B| = 0$ e $|A| = -\frac{b^2}{4}$, concludiamo che per $b \neq 0$ abbiamo un cono. Per $b = 0$, dal momento che $\rho(B) = 3$, abbiamo un cilindro parabolico (in quanto Γ è una parabola).