CdL in Ingegneria Informatica - Ingegneria Elettronica (P-Z)
Ingegneria Civile - Ingegneria REA

Prova scritta di **Algebra lineare e Geometria**- 11 Aprile 2014

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.

I

Sono dati in $\mathbb{R}^4$ i vettori $v_1 = (1,0,0,0)$, $v_2 = (0,0,-1,-1)$, $v_3 = (1,0,0,1)$, $v_4 = (0,1,0,1)$, e $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'endomorfismo dato dalle seguenti assegnazioni:

$$\begin{cases} f(v_1) = (h,0,0,2) \\ f(v_2) = (-2h,0,h,0) \\ f(v_3) = (0,0,0,0) \\ f(v_4) = (0,0,h,0) \end{cases} \quad \text{con } h \text{ parametro reale}$$

1) Studiare f al variare di $h \in \mathbb{R}$, determinando in ciascun caso $\operatorname{Ker} f$ e $\operatorname{Im} f$.

2) Calcolare $f^{-1}(v_1)$, al variare di $h \in \mathbb{R}$.

3) Discutere la semplicità di f al variare di $h \in \mathbb{R}$.

4) Sia $V = \mathscr{L}(v_1, v_2, v_3) \subseteq \mathbb{R}^4$. Verificare che f induce un endomorfismo $g\colon V \to V$ per ogni valore di $h \in \mathbb{R}$.

5) Discutere la semplicità di g al variare di $h \in \mathbb{R}$.

*S*oluzione

1) Considerata la base $\mathscr{A} = [v_1, v_2, v_3, v_4]$ di $\mathbb{R}^4$, abbiamo:

$$M^{\mathscr{A}}(f) = \begin{pmatrix} h-2 & -h & 0 & h \\ 0 & -h & 0 & -h \\ 2 & -h & 0 & -h \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si vede facilmente che per $h \neq 0$ si ha $\rho(M^{\mathscr{A}}(f)) = 3$, per cui $\dim \operatorname{Im} f = 3$ e una sua base è $[(h,0,0,2), (-2h,0,h,0), (0,0,h,0)]$. Inoltre, $\dim \ker f = 1$ e si ha $\ker f = \mathscr{L}(v_3) = \mathscr{L}((1,0,0,1))$.

Per $h = 0$, abbiamo $\rho(M^{\mathscr{A}}(f)) = 1$, per cui $\dim \operatorname{Im} f = 1$ e $\operatorname{Im} f = \mathscr{L}((-2,0,0,2))$. Inoltre, $\dim \ker f = 3$ e $\ker f = \mathscr{L}(v_2, v_3, v_4) = \mathscr{L}((0,0,-1,-1), (1,0,0,1), (0,1,0,1))$.

2) Dal momento che $[v_1]_{\mathscr{A}} = (1,0,0,0)$, occorre risolvere il sistema:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} h-2 & -h & 0 & h & 1 \\ 0 & -h & 0 & -h & 0 \\ 2 & -h & 0 & -h & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Si vede facilmente che per $h \neq 0$ si ha:

$$f^{-1}(v_1) = \left\{ \left(0, -\frac{1}{2h}, z, \frac{1}{2h}\right)_{\mathscr{A}} \in \mathbb{R}^4 \right\} = \left\{ \left(z, \frac{1}{2h}, \frac{1}{2h}, \frac{1}{h} + z\right) \in \mathbb{R}^4 \right\}.$$

Per $h = 0$ si ha $f^{-1}(v_1) = \emptyset$.

3) Dato che:
$$P(T) = \begin{vmatrix} h-2-T & -h & 0 & h \\ 0 & -h-T & 0 & -h \\ 2 & -h & -T & -h \\ 0 & 0 & 0 & -T \end{vmatrix} = T^2(h-2-T)(-h-T).$$

Per $h \neq 0,1,2$, abbiamo $m_0 = 2$, $m_{h-2} = m_{-h} = 1$. Inoltre, essendo $\dim V_0 = \dim\ker f = 1 < 2 = m_0$, allora per $h \neq 0,1,2$ f non è semplice.

Per $h = 0$, abbiamo $m_0 = 3$ e $m_{-2} = 1$. Dal momento che $\dim V_0 = \dim\ker f = 3 = m_0$ e che necessariamente $\dim V_{-2} = m_{-2} = 1$, allora per $h = 0$ f è semplice.

Per $h = 1$, abbiamo $m_0 = 2$ e $m_{-1} = 2$, ma, essendo $\dim V_0 = \dim\ker f = 1 < 2 = m_0$, allora per $h = 1$ f non è semplice.

Per $h = 2$, abbiamo $m_0 = 3$ e $m_{-2} = 1$, ma, essendo $\dim V_0 = \dim\ker f = 1 < 3 = m_0$, allora per $h = 2$ f non è semplice.

4) Dal momento che $f(v_1), f(v_2), f(v_3), (f_4) \in V$, allora $\operatorname{Im} f \subseteq V$ per ogni h, per cui $f|_V$ induce un endomorfismo g di V.

5) Data la base $\mathscr{B} = [v_1, v_2, v_3]$ di V, allora:
$$M^{\mathscr{B}}(g) = \begin{pmatrix} h-2 & -h & 0 \\ 0 & -h & 0 \\ 2 & -h & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad P(T) = -T(-h-T)(h-2-T).$$

Per $h \neq 0,1,2$ i tre autovalori sono tutti distinti di molteplicità algebrica 1, per cui g è semplice per $h \neq 0,1,2$.

Per $h = 0$, abbiamo $m_0 = 2$ e $m_{-2} = 1$. Dato che $\rho(M(g)) = 1$, allora $\dim V_0 = 2 = m_0$ e, essendo $m_{-2} = 1$, deve anche essere $\dim V_{-2} = m_{-2} = 1$. Dunque, per $h = 0$ g è semplice.

Per $h = 1$, abbiamo $m_0 = 1$ e $m_{-1} = 2$. Dato che $\rho(M(g) + I) = 2$, allora $\dim V_{-1} = 1 < 2 = m_{-1}$, per cui per $h = 1$ g non è semplice.

Per $h = 2$, abbiamo $m_0 = 2$ e $m_{-2} = 1$. Dato che $\rho(M(g)) = 2$, allora $\dim V_0 = 1 < 2 = m_0$, per cui per $h = 2$ g non è semplice.

II

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1) Dati i vettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$ di componenti $(2,-1,1)$ e $(1,0,1)$, determinare $\vec{v} \wedge \vec{w}$ e l'angolo che essi formano. Determinare la retta r perpendicolare ai vettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$ e passante per $P = (1,0,0)$ e calcolare la distanza dell'origine O da r.

2) Determinare e studiare il fascio di coniche passanti per i punti $A = (1,-1)$, $B = (1,1)$, $C = (0,2)$ e $D = (0,-2)$. Determinare vertice, fuoco, asse di simmetria e direttrice della parabola del fascio.

3) Determinare e studiare le quadriche contenenti la conica:
$$\Gamma \colon \begin{cases} x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$
e le rette $x - 1 = y = 0$ e $x = y - 1 = 0$.

Soluzione

1) Si vede facilmente che $\vec{v} \wedge \vec{w} = -\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ e che i due vettori formano un angolo di $\frac{\pi}{6}$. La retta r cercata è parallela al vettore $\vec{v} \wedge \vec{w}$, per cui:
$$r \colon x - 1 = y = -z \Rightarrow \begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ y + z = 0. \end{cases}$$

Il piano passante π per O e perpendicolare a r ha equazione $x+y-z=0$ e:

$$H=\pi\cap r\colon \begin{cases} x-y-1=0 \\ y+z=0 \\ x+y-z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{2}{3} \\ y=-\dfrac{1}{3} \\ z=\dfrac{1}{3}. \end{cases}$$

Dunque, $d(O,r)=\overline{OH}=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

2) Le rette AB, CD, AC, BD hanno equazioni, rispettivamente, $x-1=0$, $x=0$, $3x+y-2=0$ e $3x-y-2=0$. Dunque, il fascio di coniche cercato ha equazione:

$$hx(x-1)+(3x+y-2)(3x-y-2)=0 \Rightarrow (h+9)x^2-y^2-(12+h)x+4=0.$$

Dal momento che $|B|=\frac{h^2+8h}{4}$, vediamo che l'altra conica spezzata si trova per $h=-8$ ed è $(x-y-2)(x+y-2)=0$. Inoltre, $|A|=-h-9$. Dunque, per $h<-9$ abbiamo delle ellissi e per $h=-10$ abbiamo una circonferenza; per $h=-9$ abbiamo una parabola e per $h>-9$ abbiamo delle iperboli. Non ci sono iperboli equilatere.

La parabola del fascio ha equazione $-y^2-3x+4=0$, per cui il vertice è $V=(\frac{4}{3},0)$, $y=0$ è asse di simmetria, $F=(-\frac{5}{3},0)$ è il fuoco e $x=\frac{13}{3}$ è la direttrice.

3) La generica quadrica contenente Γ ha equazione $x^2+y^2-1+z(ax+by+cz+d)=0$. Imponendo che la conica contenga le due rette assegnate troviamo:

$$\begin{cases} c=0 \\ a+d=0 \\ b+d=0. \end{cases}$$

Dunque, le quadriche cercate hanno equazione:

$$x^2+y^2-dxz-dyz+dz-1=0.$$

Le matrici associate sono:

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{d}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{d}{2} & 0 \\ -\frac{d}{2} & -\frac{d}{2} & 0 & \frac{d}{2} \\ 0 & 0 & \frac{d}{2} & -1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{d}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{d}{2} \\ -\frac{d}{2} & -\frac{d}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Inoltre, $|B|=\frac{d^2}{4}$, $|A|=-\frac{d^2}{2}$ e $P(T)=(1-T)(T^2-T-\frac{d^2}{2})$. Dunque, per $d\neq 0$, abbiamo degli iperboloidi iperbolici e per $d=0$ abbiamo un cilindro, essendo in tal caso $\rho(B)=3$.