CdL in Ingegneria Informatica - Ingegneria Elettronica (P-Z) -Ingegneria REA

Prova scritta di **Algebra lineare e Geometria**- 4 Novembre 2014

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.

I

È assegnata l'applicazione lineare $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da:

$$\begin{aligned} f(1,1,1) &= (h-1, h-1, h+1) \\ f(1,0,1) &= (0,-1,h+2) \\ f(0,1,1) &= (h-2, h-1, h). \end{aligned}$$

1) Studiare f, al variare di $h \in \mathbb{R}$, determinando $\operatorname{Ker} f$ e $\operatorname{Im} f$.
2) Calcolare $f^{-1}(1,1,0)$, al variare di $h \in \mathbb{R}$.
3) Studiare la semplicità di f, al variare di $h \in \mathbb{R}$.
4) Dati $V = \mathscr{L}((1,0,1),(-1,1,0))$ e $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+3y+z=0\}$, determinare il valore di h per il quale $f(V) \subseteq W$ e stabilire se per tale valore si ha $f(V) = W$.

I

1) Molto facilmente si vede che la matrice associata a f rispetto alla base canonica è:

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & h-1 & -1 \\ 0 & h & -1 \\ 1 & -1 & h+1 \end{pmatrix}.$$

Dal momento che $|M(f)| = h(h+1)$, abbiamo che per $h \neq 0, -1$ f è un isomorfismo, cioè f è iniettiva e suriettiva. In particolare, $\operatorname{Ker} f = \{(0,0,0)\}$ e $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^3$.

Sia $h = 0$. In tal caso:

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xmapsto{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque, $\dim \operatorname{Im} f = \rho(M(f)) = 2$ e una sua base è $[(1,0,1),(-1,-1,1)]$. Inoltre, $\dim \operatorname{Ker} f = 1$ e:

$$\operatorname{Ker} f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x-y-z=0,\ -z=0\} = \mathscr{L}((1,1,0)).$$

Sia $h = -1$. In tal caso:

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xmapsto{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque, $\dim \operatorname{Im} f = \rho(M(f)) = 2$ e una sua base è $[(1,0,1),(-2,-1,1)]$. Inoltre, $\dim \operatorname{Ker} f = 1$ e:

$$\operatorname{Ker} f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x-2y-z=0,\ -y-z=0\} = \mathscr{L}((1,1,-1)).$$

2) Dobbiamo risolvere il sistema la cui matrice completa associata è:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & h-1 & -1 & 1 \\ 0 & h & -1 & 1 \\ 1 & -1 & h+1 & 0 \end{array}\right) \xmapsto{\text{riducendo, con } h\neq 0} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & h-1 & -1 & 1 \\ 0 & h & -1 & 1 \\ 0 & 0 & h+1 & 0 \end{array}\right).$$

Dunque, per $h \neq 0, -1$ il sistema ammette una sola soluzione:

$$f^{-1}(1,1,0) = \{(\frac{1}{h}, \frac{1}{h}, 0)\}.$$

Per $h = -1$ la matrice ridotta è:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

per cui il sistema ammette ∞^1 soluzioni:

$$f^{-1}(1,1,0) = \{(y, y, -y-1) \in \mathbb{R}^3\}.$$

Per $h = 0$ abbiamo:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xmapsto{\text{riducendo}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right),$$

per cui il sistema non ammette soluzioni e $f^{-1}(1,1,0) = \emptyset$.

3) Il polinomio caratteristico associato a f è:

$$P(T) = \begin{vmatrix} 1-T & h-1 & -1 \\ 0 & h-T & -1 \\ 1 & -1 & h+1-T \end{vmatrix} = (1-T)(h-T)(h+1-T).$$

Dunque, gli autovalori sono 1, h e $h+1$. Essi sono a due a due distinti per $h \neq 0, 1$, per cui per tali valori f è certamente semplice.

Sia $h = 0$. In tal caso abbiamo come autovalori 1 e 0, con $m_1 = 2$ e $m_0 = 1$. f sarà semplice se $\dim V_1 = m_1 = 2$. Sappiamo che $V_1 = \operatorname{Ker} f_1$ e:

$$M(f_1) = M(f) - I = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dal momento che $\rho(M(f_1)) = 2$, allora concludiamo che $\dim V_1 = 1 < 2 = m_1$, per cui per $h = 0$ f non è semplice.

Sia $h = 1$. In tal caso abbiamo come autovalori 1 e 2, con $m_1 = 2$ e $m_2 = 1$. f sarà semplice se $\dim V_1 = m_1 = 2$. Sappiamo che $V_1 = \operatorname{Ker} f_1$ e:

$$M(f_1) = M(f) - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dal momento che $\rho(M(f_1)) = 2$, allora concludiamo che $\dim V_1 = 1 < 2 = m_1$, per cui per $h = 1$ f non è semplice.

4) Sappiamo che $f(1,0,1) = (0,-1,h+2)$ e si vede facilmente che $f(-1,1,0) = (h-2, h, -2)$. Dunque, $f(V) = \mathscr{L}((0,-1,h+2),(h-2,h,-2))$. Inoltre, $f(V) \subseteq W$ se e solo se $(0,-1,h+2),(h-2,h,-2) \in W$, cioè se e solo se verificano l'equazione cartesiana di W: è semplice verificare che questo avviene per $h = 1$. In tal caso, abbiamo $f(V) = \mathscr{L}((0,-1,3),(-1,1,-2))$. Dal momento che questi vettori sono linearmente indipendenti, si ha $\dim f(V) = 2$, ma sappiamo che $f(V) \subseteq W$ e che $\dim W = 2$. Questo ci dice che per $h = 1$ si ha anche che $f(V) = W$.

II

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1) Dati i piani $\alpha\colon x - y + z = 0$ e $\beta\colon 2x + y - z = 0$ e il punto $P = (0, 0, 1)$, determinare la retta r passante per P e parallela ai piani α e β e determinare le distanze $d(r, \alpha)$ e $d(r, \beta)$.

2) Studiare il fascio di coniche del piano $z = 0$ di equazione:
$$4x^2 + (-h - 4)y^2 + hx + 1 = 0,$$
determinando, in particolare, punti base e coniche spezzate.

3) Determinare il cilindro di vertice $V = (1, 1, 1, 0)$ contenente la conica:
$$\Gamma\colon \begin{cases} z = 0 \\ x^2 - y^2 = 1. \end{cases}$$

1) Se (l, m, n) sono parametri direttori della retta cercata, deve accadere:
$$\begin{cases} l - m + n = 0 \\ 2l + m - n = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} l = 0 \\ m = n, \end{cases}$$
per cui $(0, 1, 1)$ sono parametri direttori della retta r che avrà equazioni:
$$\begin{cases} x = 0 \\ y = z + 1. \end{cases}$$
Inoltre, essendo la retta parallela ai due piani si ha:
$$d(r, \alpha) = d(P, \alpha) = \frac{1}{\sqrt{3}}$$
e
$$d(r, \beta) = d(P, \beta) = \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

2) La matrice associata al fascio di coniche è:
$$B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & \frac{h}{2} \\ 0 & -h - 4 & 0 \\ \frac{h}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix},$$
per cui $|B| = \frac{1}{4}(h + 4)(h^2 - 16)$. Questo vuol dire che le coniche spezzate si hanno per $h = 4$ e per $h = -4$. Esse hanno equazioni, rispettivamente:
$$4x^2 - 8y^2 + 4x + 1 = 0 \Rightarrow (2x + 2\sqrt{2}y + 1)(2x - 2\sqrt{2}y + 1) = 0$$
e
$$4x^2 - 4x + 1 = 0 \Rightarrow (2x - 1)^2 = 0.$$
I punti base possono essere ottenuti dal sistema:
$$\begin{cases} (2x - 1)^2 = 0 \\ (2x + 2\sqrt{2}y + 1)(2x - 2\sqrt{2}y + 1) = 0, \end{cases}$$
da cui otteniamo i punti $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ e $(\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, entrambi contati due volte.

Osserviamo, ora, che la conica nascosta ha equazione $-y^2 + x = 0$: essa è una parabola. Inoltre, $|A| = -4(h + 4)$. Questo significa che per $h > -4$ abbiamo delle iperboli e per $h = 0$ abbiamo un'iperbole equilatera. L'unica parabola del fascio è quella che si ottiene per $h = \infty$ e per $h < -4$ abbiamo delle ellissi (tutte reali) e per $h = -8$ abbiamo una circonferenza.

3) Il generico punto della conica è $P = (\alpha, \beta, 0)$, con $\alpha^2 - \beta^2 = 1$. La retta PV ha equazione:
$$x - \alpha = y - \beta = z,$$
per cui abbiamo $\alpha = x - z$ e $\beta = y - z$. Sostituendo, otteniamo l'equazione del cilindro:
$$(x - z)^2 - (y - z)^2 = 1.$$