CdL in Ingegneria Informatica (P-Z) - Ingegneria Elettronica (P-Z)

Prova in itinere di **Algebra lineare**, corso di **Algebra lineare e Geometria** - 3 Maggio 2013

Durata della prova: due ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.

Compito A

È assegnata l'applicazione lineare $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da:

$$\begin{aligned} f(1,1,0) &= (1,1,0) \\ f(0,1,-1) &= (h,0,h) \\ f(1,1,-1) &= (1+h,2,2h-2), \end{aligned}$$

al variare di $h \in \mathbb{R}$.

1) Studiare f al variare di $h \in \mathbb{R}$, determinando $\operatorname{Ker} f$ e $\operatorname{Im} f$.
2) Studiare la semplicità di f nei casi $h = 1$ e $h = -1$, determinando, se possibile, una base di autovettori per f.
3) Calcolare, al variare di $h \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(1,2,-1)$.
4) Dati i sottospazi $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - 2z = 0\}$ e $V = \mathscr{L}((2,1,1),(1,-1,2))$, calcolare $f(U)$ e determinare il valore di h per il quale $f(U) \subseteq V$. Per tale valore di h $f(U) = V$? Giustificare la risposta.

Soluzione

1) Da:

$$\begin{aligned} f(1,1,0) &= (1,1,0) \\ f(0,1,-1) &= (h,0,h) \\ f(1,1,-1) &= (1+h,2,2h-2), \end{aligned}$$

otteniamo:

$$\begin{cases} f(e_1) + f(e_2) = (1,1,0) \\ f(e_2) - f(e_3) = (h,0,h) \\ f(e_1) + f(e_2) - f(e_3) = (1+h,2,h-2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(e_1) = (1,2,h-2) \\ f(e_2) = (0,-1,2-h) \\ f(e_3) = (-h,-1,2-2h). \end{cases}$$

Dunque:

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -h \\ 2 & -1 & -1 \\ h-2 & 2-h & 2-2h \end{pmatrix}$$

e $|M(f)| = h^2 - h = h(h-1)$. Quindi, per $h \neq 0,1$ $|M(f)| \neq 0$ e f è un isomorfismo, cioè f è iniettiva, per cui $\operatorname{Ker} f = \{(0,0,0)\}$, ed è suriettiva, per cui $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^3$.

Sia $h = 0$. In tal caso:

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \overset{\text{riducendo}}{\longmapsto} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque, $\rho(M(f)) = 2$ e $\dim \operatorname{Im} f = 2$. Inoltre, una base di $\operatorname{Im} f$ è $[(1,2,-2),(0,-1,2)]$. Per quel che riguarda $\operatorname{Ker} f$, sappiamo che $\dim \operatorname{Ker} f = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \operatorname{Im} f = 3-2 = 1$ e:

$$\operatorname{Ker} f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0, -y-z = 0\} = \mathscr{L}((0,1,-1)).$$

Sia $h = 1$. In tal caso:

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{\text{riducendo}}{\longmapsto} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque, $\rho(M(f)) = 2$ e $\dim \operatorname{Im} f = 2$. Inoltre, una base di $\operatorname{Im} f$ è $[(1,2,-1),(-1,-1,0)]$. Per quel che riguarda $\operatorname{Ker} f$, sappiamo che $\dim \operatorname{Ker} f = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \operatorname{Im} f = 3-2 = 1$ e:

$$\operatorname{Ker} f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x-z = 0, x-y = 0\} = \mathscr{L}((1,1,1)).$$

2) Sia $h = 1$. In tal caso:

$$P(T) = \begin{vmatrix} 1-T & 0 & -1 \\ 2 & -1-T & -1 \\ -1 & 1 & -T \end{vmatrix} = -T(1-T)(-1-T).$$

Dunque, gli autovalori sono $0, 1, -1$, tutti di molteplcità algebrica 1, per cui f per $h = 1$ è semplice. Calcoliamo gli autospazi. $V_0 = \operatorname{Ker} f = \mathscr{L}((1,1,1))$.
Sia $T = 1$. Allora $V_1 = \operatorname{Ker} f_1$ e:

$$M(f_1) = M(f) - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \overset{\text{riducendo}}{\longmapsto} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi:

$$V_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid -z = 0, 2x-2y = 0\} = \mathscr{L}((1,1,0)).$$

Sia $T = -1$. Allora $V_{-1} = \operatorname{Ker} f_{-1}$ e:

$$M(f_{-1}) = M(f) + I = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{\text{riducendo}}{\longmapsto} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi:

$$V_{-1} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x-z = 0, x+y = 0\} = \mathscr{L}((1,-1,2)).$$

Dunque, per $h = 1$ una base di autovettori è $[(1,1,1),(1,1,0),(1,-1,2)]$.
Sia $h = -1$. In tal caso:

$$P(T) = \begin{vmatrix} 1-T & 0 & 1 \\ 2 & -1-T & -1 \\ -3 & 3 & 4-T \end{vmatrix} = -T^3 + 4T^2 - 5T + 2 = -(T-1)^2(T-2).$$

Dunque, gli autovalori sono 1 e 2, con $m_1 = 2$ e $m_2 = 1$. Quindi, $\dim V_2 = m_2 = 1$ e $1 \leq \dim V_1 \leq m_1 = 2$. f è semplice se $\dim V_1 = m_1 = 2$. $V_1 = \operatorname{Ker} f_1$ e:

$$M(f_1) = M(f) - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \\ -3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi, $\rho(M(f_1)) = 2$, per cui $\dim V_1 = 3 - \rho(M(f_1)) = 3 - 2 = 1 < m_1 = 2$. Quindi, per $h = -1$ f non è semplice.

3) Per calcolare $f^{-1}(1,2,-1)$ occorre risolvere il sistema la cui matrice completa è:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -h & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \\ h-2 & 2-h & 2-2h & -1 \end{array}\right) \overset{\text{riducendo}}{\longmapsto} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -h & 1 \\ 0 & -1 & 2h-1 & 0 \\ 0 & 0 & -h^2+h & -h+1 \end{array}\right).$$

Quindi, per $h \neq 0,1$ $\rho(A) = \rho(A|B) = 3$ e il sistema ammete una sola soluzione:

$$\begin{cases} x - hz = 1 \\ -y + (2h-1)z = 0 \\ (-h^2+h)z = -h+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = \frac{2h-1}{h} \\ z = \frac{1}{h}. \end{cases}$$

Quindi, per $h \neq 0,1$ $f^{-1}(1,2,-1) = \{(2, \frac{2h-1}{h}, \frac{1}{h})\}$.
Se $h = 0$, la matrice ridotta è:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right),$$

per cui $\rho(A) = 2$ e $\rho(A|B) = 3$. Questo vuol dire che il sistema è impossibile, per cui per $h = 0$ $f^{-1}(1,2,-1) = \emptyset$.
Se $h = 1$, la matrice ridotta diventa:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

per cui $\rho(A) = \rho(A|B) = 2$ e il sistema ammette ∞^1 soluzioni:

$$\begin{cases} x - z = 1 \\ -y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = z + 1 \\ y = z. \end{cases}$$

Dunque, per $h = 1$ $f^{-1}(1,2,-1) = \{(z+1, z, z) \in \mathbb{R}^3\}$.

4) Dato che $U = \{(-y+2z, y, z) \in \mathbb{R}^3\} = \mathscr{L}((-1,1,0),(2,0,1))$, allora $f(U) = \mathscr{L}(f(-1,1,0), f(2,0,1))$. Da:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -h \\ 2 & -1 & -1 \\ h-2 & 2-h & 2-2h \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 4-2h \end{pmatrix}$$

e

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -h \\ 2 & -1 & -1 \\ h-2 & 2-h & 2-2h \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-h \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

otteniamo $f(-1,1,0) = (-1,-3,4-2h)$ e $f(2,0,1) = (2-h,3,-2)$, da cui concludiamo che $f(U) = \mathscr{L}((-1,-3,4-2h),(2-h,3,-2))$. Calcoliamo $\dim U$:

$$\begin{pmatrix} -1 & -3 & 4-2h \\ 2-h & 3 & -2 \end{pmatrix} \overset{\text{riducendo}}{\longmapsto} \begin{pmatrix} -1 & -3 & 4-2h \\ 1-h & 0 & 2-2h \end{pmatrix}.$$

Quindi, per $h \neq 1$ $\dim U = 2$ e $[(-1,-3,4-3h),(2-h,3,-2)]$ è una sua base, mentre per $h = 1$ $\dim U = 1$ e $U = \mathscr{L}((-1,-3,2))$.
Per vedere quando $f(U) \subseteq V$ dobbiamo calcolare l'equazione cartesiana di V:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 3x - 3y - 3z,$$

per cui $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y - z = 0\}$. $f(U) \subseteq V$ se $(-1,-3,4-2h),(2-h,3,-2) \in V$, cioè se:

$$\begin{cases} -1 + 3 - 4 + 2h = 0 \\ 2 - h - 3 + 2 = 0, \end{cases}$$

cioè se $h = 1$. Quindi, se $h = 1$, $f(U) \subseteq V$, ma $f(U) \neq V$, perché $\dim f(U) = 1$, mentre $\dim V = 2$.