CdL in Ingegneria Informatica (P-Z) - Ingegneria Elettronica (P-Z)

Prova in itinere di **Geometria**, corso di **Algebra lineare e Geometria** - 14 Giugno 2013

Durata della prova: due ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti. Compito A

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1) Sono dati la retta:
$$r\colon \begin{cases} x - y + z - 1 = 0 \\ 2x + y - z - 2 = 0, \end{cases}$$
il piano $\pi\colon 3x - y + 2z + 1 = 0$ e il punto $P = (1, 0, -1)$. Determinare:
   - la retta s passante per P e perpendicolare al piano π,
   - la retta t passante per P e parallela a r,
   - la retta u passante per P, perpendicolare a r e parallela a π,
   - la distanza di u da π,
   - l'angolo che forma la retta r con l'asse $\vec{y}$.

2) Studiare il fascio di coniche del piano $z = 0$ di equazione:
$$hx^2 - 2xy + y^2 - 2hx + 2y + 1 = 0,$$
determinando, in particolare, punti base e coniche spezzate. Determinare una forma canonica della conica ottenuta per $h = -3$.

3) Studiare, al variare del parametro reale h le quadriche di equazione:
$$x^2 - 2hxy + 2hxz + (h-1)y^2 - 1 = 0.$$

Soluzione

1) Un vettore perpendicolare al piano π è quello di componenti $(3, -1, 2)$. Dunque, esso è anche un vettore parallelo alla retta s, che avrà equazioni:
$$\frac{x-1}{3} = \frac{y}{-1} = \frac{z+1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x + 3y - 1 = 0 \\ 2y + z + 1 = 0. \end{cases}$$
La retta t è una retta del tipo:
$$\begin{cases} x - y + z + h = 0 \\ 2x + y - z + k = 0. \end{cases}$$
Imponendo il passaggio per P troviamo $h = 0$ e $k = -3$, per cui:
$$t\colon \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + y - z - 3 = 0. \end{cases}$$
Le condizioni di parallelismo tra retta e piano e ortogonalità tra due rette portano al sistema:
$$\begin{cases} 3l - m + 2n = 0 \\ m + n = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n = -m \\ l = m, \end{cases}$$

per cui $(1,1,-1)$ sono parametri direttori della retta u che ha equazioni:

$$x-1=y=-(z+1) \Rightarrow \begin{cases} x-y-1=0 \\ y+z+1=0. \end{cases}$$

Dato che u è parallela al piano π:

$$d(u,\pi)=d(P,\pi)=\frac{|3-2+1|}{\sqrt{9+1+4}}=\frac{2}{\sqrt{14}}.$$

Infine, dal momento che parametri direttori di $\vec{y}$ sono $(0,1,0)$, abbiamo:

$$\cos\widehat{r\vec{y}}=\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \widehat{r\vec{y}}=\frac{\pi}{4}.$$

2) La matrice associata al fascio di coniche è:

$$B=\begin{pmatrix} h & -1 & -h \\ -1 & 1 & 1 \\ -h & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

e $|B|=-(h-1)^2$. Quindi, una prima conica spezzata si ha per $h=1$ e ha equazione:

$$x^2-2xy+y^2-2x+2y+1=0 \Rightarrow (x-y-1)^2=0.$$

L'altra conica spezzata si trova per $h=\infty$ e ha equazione $x(x-2)=0$. Quindi, i punti base del fascio sono dati dal sistema:

$$\begin{cases} x(x-2)=0 \\ (x-y-1)^2=0, \end{cases}$$

da cui ricaviamo i punti $(0,-1)$ e $(2,1)$, entrambi contati due volte. Inoltre:

$$|A|=\begin{vmatrix} h & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=h-1,$$

per cui per $h>1$ abbiamo delle ellissi reali (non ci sono circonferenze nel fascio), per $h=1$ non abbiamo una parabola ma una conica spezzata e per $h<1$ abbiamo delle iperboli, tra le quali troviamo per $h=-1$ un'iperbole equilatera.

Per $h=-3$ la conica che troviamo ha equazione:

$$-3x^2-2xy+y^2+6x+2y+1=0$$

e $|B|=-16$ e $|A|=-4$. Quindi, una forma canonica della conica (che è un'iperbole) è del tipo $\alpha X^2+\beta Y^2=\gamma$, con $\gamma=-\frac{|B|}{|A|}=-4$. Inoltre:

$$P_A(T)=\begin{vmatrix} -3-T & -1 \\ -1 & 1-T \end{vmatrix}=T^2+2T-4,$$

per cui possiamo prendere $\alpha=-1+\sqrt{5}$ e $\beta=-1-\sqrt{5}$. Dunque una forma canonica è:

$$(-1+\sqrt{5})X^2-(1+\sqrt{5})Y^2=-4.$$

3) Le matrici associate sono:

$$B=\begin{pmatrix} 1 & -h & h & 0 \\ -h & h-1 & 0 & 0 \\ h & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A=\begin{pmatrix} 1 & -h & h \\ -h & h-1 & 0 \\ h & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

per cui $|B| = h^2(h-1)$ e $|A| = -h^2(h-1)$. Per $h = 0$ e $h = 1$ abbiamo $|B| = |A| = 0$. In entrambi i casi abbiamo che $\rho(B) = 3$, per cui per questi valori abbiamo due cilindri. Inoltre:

$$P_A(T) = \begin{vmatrix} 1-T & -h & h \\ -h & h-1-T & 0 \\ h & 0 & -T \end{vmatrix} = -T^3 + hT^2 + (2h^2 - h + 1)T - h^2(h-1).$$

Dal momento che i due sistemi:

$$\begin{cases} h > 0 \\ 2h^2 - h + 1 < 0 \\ -h^2(h-1) > 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} h < 0 \\ 2h^2 - h + 1 < 0 \\ -h^2(h-1) < 0 \end{cases}$$

sono privi di soluzioni, per $h \neq 0, 1$ abbiamo degli iperboloidi, che sono iperbolici per $h > 1$ ed ellittici per $h < 1, h \neq 0$.