CdL in Ingegneria Informatica - Ingegneria Elettronica (P-Z)
Ingegneria delle Telecomunicazioni

Prova scritta di **Algebra lineare e Geometria**- 5 Settembre 2013

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.

I

Sono assegnati lo spazio vettoriale $V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 3x - 2y + z - t = 0\}$ e la base $\mathscr{A} = [v_1, v_2, v_3]$ di V, con $v_1 = (1, 1, 0, 1)$, $v_2 = (0, 1, 1, -1)$ e $v_3 = (1, 0, -3, 0)$. Consideriamo l'endomorfismo $f\colon V \to V$ definito da:

$$M^{\mathscr{A}}(f) = \begin{pmatrix} h & 1 & 0 \\ 1-h & 2 & 2-2h \\ 0 & -1 & h \end{pmatrix},$$

al variare di $h \in \mathbb{R}$.

1) Studiare f al variare di $h \in \mathbb{R}$, determinando $\operatorname{Ker} f$ e $\operatorname{Im} f$.

2) Studiare la semplicità di f al variare di $h \in \mathbb{R}$.

3) Nel caso $h = 0$ determinare l'applicazione $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to V$ tale che $\varphi|_V = f$ e $\varphi(1, 0, 0, 0) = (1, 1, 0, 1)$.

4) Nel caso $h = 1$ mostrare che f è invertibile e determinare l'applicazione inversa f^{-1}.

Soluzione

1) $|M^{\mathscr{A}}(f)| = h(h+1)$, per cui per $h \neq 0, -1$ f è un isomorfismo, cioè f è iniettiva e suriettiva e $\operatorname{Im} f = V$ e $\operatorname{Ker} f = \{(0, 0, 0, 0)\}$.

Sia $h = 0$. In tal caso:

$$M^{\mathscr{A}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \overset{\text{riducendo}}{\longmapsto} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi, $\dim \operatorname{Im} f = \rho(M^{\mathscr{A}}(f)) = 2$ e $[(0, 1, 0)_{\mathscr{A}}, (1, 2, -1)_{\mathscr{A}}]$, cioè $[(0, 1, 1, -1), (0, 3, 5, -1)]$, è una base di $\operatorname{Im} f$. Inoltre, $\dim \operatorname{Ker} f = 1$ e:

$$\operatorname{Ker} f = \{v \in V \mid [v]_{\mathscr{A}} = (a, b, c),\ b = 0,\ a + 2c = 0\} = \mathscr{L}((1, 2, 3, 2)).$$

Sia $h = -1$. In tal caso:

$$M^{\mathscr{A}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \overset{\text{riducendo}}{\longmapsto} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi, $\dim \operatorname{Im} f = \rho(M^{\mathscr{A}}(f)) = 2$ e $[(-1, 2, 0)_{\mathscr{A}}, (1, 2, -1)_{\mathscr{A}}]$, cioè $[(-1, 1, 2, -3), (0, 3, 5, -1)]$, è una base di $\operatorname{Im} f$. Inoltre, $\dim \operatorname{Ker} f = 1$ e:

$$\operatorname{Ker} f = \{v \in V \mid [v]_{\mathscr{A}} = (a, b, c),\ -a + b = 0,\ 4b + 4c = 0\} = \mathscr{L}((0, 2, 4, 0)) = \mathscr{L}((0, 1, 2, 0)).$$

2) Dato che:

$$P(T) = \begin{vmatrix} h-T & 1 & 0 \\ 1-h & 2-T & 2-2h \\ 0 & -1 & h-T \end{vmatrix} = (h-T)(T-1)(T-h-1),$$

vediamo che gli autovalori sono $h, h+1, 1$, per cui per $h \neq 0, 1$ f è certamente semplice.

Sia $h = 0$. In tal caso gli autovalori sono 0 con $m_0 = 1$ e 1 con $m_1 = 2$. f è semplice se $\dim V_1 = m_1 = 2$:

$$M^{\mathscr{A}}(f) - I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xmapsto{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tuttavia $\rho = 2$, per cui $\dim V_1 = 1 < 2 = m_1$. Dunque, per $h = 0$ f non è semplice.

Sia $h = 1$. In tal caso gli autovalori sono 2 con $m_2 = 1$ e 1 con $m_1 = 2$. f è semplice se $\dim V_1 = m_1 = 2$:

$$M^{\mathscr{A}}(f) - I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xmapsto{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque, $\rho = 1$, per cui $\dim V_1 = 2 = m_1$. Dunque, per $h = 1$ f è semplice.

3) Dal momento che $(1, 0, 0, 0) \notin V$, $[v_1, v_2, v_3, (1, 0, 0, 0)]$ è una base di $\mathbb{R}^4$ e l'applicazione lineare φ è definita da:

$$\begin{aligned} \varphi(v_1) &= f(v_1) = v_2 = (0, 1, 1, -1) \\ \varphi(v_2) &= f(v_2) = v_1 + 2v_2 - v_3 = (0, 3, 5, -1) \\ \varphi(v_3) &= f(v_3) = 2v_2 = (0, 2, 2, -2) \\ \varphi(1, 0, 0, 0) &= (1, 1, 0, 1). \end{aligned}$$

4) Dato che $|M^{\mathscr{A}}(f)| = 2 \neq 0$, f è invertibile. Inoltre:

$$M^{\mathscr{A}}(f^{-1}) = (M^{\mathscr{A}}(f))^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

II

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1) Dati i punti $A = (1, 0, -1)$, $B = (0, 1, 1)$, $C = (-1, 1, 1)$, determinare il piano π che li contiene. Data la retta $r\colon x - y + 1 = y - z = 0$, determinare la retta simmetrica di r rispetto a π.

2) Determinare e studiare il fascio di coniche del piano $z = 0$ tangenti a $s\colon x + y - 1 = 0$ nel punto $P_1 = (1, 0)$ e a $t\colon 2x - y - 1 = 0$ nel punto $P_2 = (1, 1)$. Determinare gli asintoti dell'iperbole equilatera del fascio.

3) Studiare, al variare del parametro reale h, le quadriche di equazione:

$$x^2 + hz^2 - 2hyz + 2x - 4hz + 2 - h = 0.$$

Soluzione

1) La retta BC ha equazioni $y - 1 = z - 1 = 0$. Quindi, il piano π è il piano contenente la retta BC e il punto A, per cui ha equazione $2y - z - 1 = 0$. r e π sono incidenti. Infatti, $r \cap \pi = \{B\}$. Scegliamo $P = (-1, 0, 0) \in r$. La retta p passante per P e ortogonale a π ha equazioni $x + 1 = y + 2z = 0$ e $p \cap \pi = \{(-1, \frac{2}{5}, -\frac{1}{5})\}$. Il simmetrico P' di P rispetto a π è il simmetrico di P rispetto al punto $(-1, \frac{2}{5}, -\frac{1}{5})$, per cui $P' = (-1, \frac{4}{5}, -\frac{2}{5})$. La retta cercata è la retta BP': $x - 5y + 5 = 7x - 5y + 5 = 0$.

2) Il fascio di coniche ha equazione:

$$(x + y - 1)(2x - y - 1) + h(x - 1)^2 = 0 \Rightarrow (h + 2)x^2 + xy - y^2 - (2h + 3)x + h + 1 = 0.$$

Le coniche spezzate del fascio sono solo le due utilizzate per ottenere la sua equazione, per cui $|B| = 0$ solo per $h = 0$. Inoltre:

$$|A| = \begin{vmatrix} h + 2 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 \end{vmatrix} = -h - \frac{9}{4},$$

per cui, per $h > -\frac{9}{4}$, con $h \neq 0$, abbiamo delle iperboli. In particolare, per $h = -1$ abbiamo un'iperbole equilatera. Per $h = -\frac{9}{4}$ abbiamo una parabola. Per $h < -\frac{9}{4}$ abbiamo delle ellissi. Non ci sono circonferenze nel fascio.

L'iperbole equilatera si ottiene per $h = -1$ e ha equazione $x^2 + xy - y^2 - x = 0$. Il centro di simmetria è il punto $C = (\frac{2}{5}, \frac{1}{5})$ e i punti impropri sono $P'_\infty = (-1 + \sqrt{5}, 2, 0)$ e $P''_\infty = (-1 - \sqrt{5}, 2, 0)$. I due asintoti sono le rette CP'_∞ e CP''_∞ di equazioni rispettivamente:

$$10x - 5(\sqrt{5} - 1)y + \sqrt{5} - 5 = 0 \quad \text{e} \quad 10x + 5(\sqrt{5} + 1)y - \sqrt{5} - 5 = 0.$$

3) Dal momento che $|B| = h^2(h - 1)$, $|A| = -h^2$ e $P_A(T) = -T^3 + (h + 1)T^2 + (h^2 - h)T - h^2$, deduciamo che per $h = 0$ abbiamo un cilindro o una quadrica spezzata. Essendo per $h = 0$ $\rho(B) = 2$, concludiamo che abbiamo una quadrica spezzata in due piani distinti. Per $h = 1$ abbiamo un cono, per $h > 1$ degli iperboloidi iperbolici e per $h < 1$, con $h \neq 0$, degli iperboloidi ellittici.