CdL in Ingegneria Informatica - Ingegneria Elettronica (P-Z)
Ingegneria delle Telecomunicazioni

Prova scritta di **Algebra lineare e Geometria**- 4 Novembre 2013

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.

Ia

È data l'applicazione lineare $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definita da:

$$f(x,y,z) = (hx+y+z, x+2y-hz, (h-1)x-y+(h+1)z, (2h+1)x+y+(2h+5)z)$$

al variare di $h \in \mathbb{R}$.

1) Studiare f al variare di $h \in \mathbb{R}$, determinando $\operatorname{Ker} f$ e $\operatorname{Im} f$ e le loro equazioni cartesiane.

2) Calcolare $f^{-1}(2,3,-1,3h+1)$, al variare di $h \in \mathbb{R}$.

3) Nel caso $h = 0$ determinare una base $\mathscr{A}$ di $\mathbb{R}^4$ tale che:

$$M^{\mathcal{E}_3,\mathscr{A}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

*S*oluzione

1) Osserviamo che:

$$M(f) = \begin{pmatrix} h & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -h \\ h-1 & -1 & h+1 \\ 2h+1 & 1 & 2h+5 \end{pmatrix}.$$

Riduciamo la matrice:

$$M(f) = \begin{pmatrix} h & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -h \\ h-1 & -1 & h+1 \\ 2h+1 & 1 & 2h+5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo},\ h\neq -2} \begin{pmatrix} h & 1 & 1 \\ 1-2h & 0 & -h-2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3-3h & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi, vediamo che per $h \neq 1,-2$ $\dim \operatorname{Im} f = \rho(M(f)) = 3$ e una sua base è $[(h,1,h-1,2h+1),(1,2,-1,1),(1,-h,h+1,2h+5)]$. Cerchiamo una sua equazione cartesiana:

$$\begin{vmatrix} h & 1 & h-1 & 2h+1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -h & h+1 & 2h+5 \\ x & y & z & t \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (3h^2+3h-6)(x-y-z) = 0.$$

Dal momento che $3h^2+3h-6 \neq 0$ esattamente per $h \neq 1,-2$, concludiamo che per $h \neq 1,-2$:

$$\operatorname{Im} f = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x-y-z=0\}.$$

Inoltre, $\dim \operatorname{Ker} f = 0$, per cui $\operatorname{Ker} f = \{(0,0,0)\}$ e f è iniettiva.

Sia $h = 1$. In tal caso:

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 7 \end{pmatrix} \xmapsto{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi, $\dim \operatorname{Im} f = 2$ e una sua base è $[(1,1,0,3),(1,2,-1,1)]$ e possiamo calcolare le sue equazioni cartesiane:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ x & y & z & t \end{pmatrix} \xmapsto{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -x+y+z & -5x+2y+t \end{pmatrix}.$$

Quindi:

$$\operatorname{Im} f = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid -x+y+z = 0,\ -5x+2y+t = 0\}.$$

Inoltre, $\dim \operatorname{Ker} f = 1$ e:

$$\operatorname{Ker} f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z = 0,\ y-2z = 0\} = \mathscr{L}((-3,2,1)).$$

Sia $h = -2$. In tal caso:

$$M(f) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ -3 & -1 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xmapsto{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi, $\dim \operatorname{Im} f = 2$ e una sua base è $[(-2,1,-3,-3),(1,2,-1,1)]$ e possiamo calcolare le sue equazioni cartesiane:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 & -3 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ x & y & z & t \end{pmatrix} \xmapsto{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 & -3 \\ 5 & 0 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & -x+y+z & \frac{-7x+y+5t}{5} \end{pmatrix}.$$

Quindi:

$$\operatorname{Im} f = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid -x+y+z = 0,\ -7x+y+5t = 0\}.$$

Inoltre, $\dim \operatorname{Ker} f = 1$ e:

$$\operatorname{Ker} f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid -2x+y+z = 0,\ 5x = 0\} = \mathscr{L}((0,1,-1)).$$

2) Occorre risolvere il sistema la cui matrice completa associata è:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} h & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -h & 3 \\ h-1 & -1 & h+1 & -1 \\ 2h+1 & 1 & 2h+5 & 3h+1 \end{array}\right) \xmapsto{\text{riducendo},h\neq-2} \left(\begin{array}{ccc|c} h & 1 & 1 & 2 \\ 1-2h & 0 & -h-2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3-3h & 0 & 0 & 3h-3 \end{array}\right).$$

Quindi, per $h \neq -2, 1$:

$$f^{-1}(2,3,-1,3h+1) = \{(-1, \tfrac{h^2+2h+4}{h+2}, \tfrac{2h}{h+2})\}.$$

Per $h = -2$ abbiamo:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ -3 & -1 & -1 & -1 \\ -3 & 1 & 1 & -5 \end{array}\right) \xmapsto{\text{riducendo},h\neq-2} \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{36}{5} \end{array}\right).$$

Quindi, per $h = -2$ si ha $f^{-1}(2,3,-1,-5) = \emptyset$.

Per $h = 1$ abbiamo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 2 \\ 1 & 2 & -1 & | & 3 \\ 0 & -1 & 2 & | & -1 \\ 3 & 1 & 7 & | & 4 \end{pmatrix} \xmapsto{\text{riducendo}, h\neq -2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 1 & -2 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi, per $h = 1$ si ha $f^{-1}(2,3,-1,4) = \{(-3z+1, 2z+1, z) \in \mathbb{R}^3\}$.

3) Sia $\mathscr{A} = [v_1, v_2, v_3, v_4]$. Allora deve essere:

$$\begin{aligned} f(e_1) &= v_1 + 2v_2 + v_3 \\ f(e_2) &= v_2 - v_3 \\ f(e_3) &= v_1 + v_2 + v_3 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_1 + 2v_2 + v_3 = (0,1,-1,1) \\ v_2 - v_3 = (1,2,-1,1) \\ v_1 + v_2 + v_3 = (1,0,1,5) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_1 = (4,2,4,14) \\ v_2 = (-1,1,-2,-4) \\ v_3 = (-2,-3,-1,-5). \end{cases}$$

A questo punto possiamo scegliere $v_4 \notin \operatorname{Im} f = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y - z = 0\}$, per esempio $v_4 = (1,0,0,0)$. Dunque, una base è:

$$\mathscr{A} = [(4,2,4,14), (-1,1,-2,-4), (-2,-3,-1,-5), (1,0,0,0)].$$

Ib

Dato l'endomorfismo $g \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che:

$$M^{\mathscr{B}}(g) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

con $\mathscr{B} = [(1,-1,1), (0,1,1), (1,0,1)]$, mostrare che g è semplice e determinare una base di autovettori.

Soluzione

Dal momento che:

$$P(T) = \begin{vmatrix} 2-T & 1 & 1 \\ 1 & 2-T & 1 \\ 1 & 1 & 2-T \end{vmatrix} = -T^3 + 6T^2 - 9T + 4 = (T-1)^2(4-T),$$

allora $m_1 = 2$ e $m_4 = 1$, per cui g è semplice se $\dim V_1 = m_1 = 2$.
Sia $T = 1$. Allora:

$$M^{\mathscr{B}}(g_1) = M^{\mathscr{B}}(g) - I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

per cui $\dim V_1 = 3 - \rho(M^{\mathscr{B}}(g_1)) = 3 - 1 = 2 = m_1$. Dunque, g è semplice. Inoltre:

$$V_1 = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid [v]_{\mathscr{B}} = (a,b,c),\ a+b+c = 0\} = \mathscr{L}(v_1 - v_3, v_2 - v_3) = \mathscr{L}((0,-1,0), (-1,1,0)).$$

Sia $T = 4$. Allora:

$$M^{\mathscr{B}}(g_4) = M^{\mathscr{B}}(g) - 4I = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xmapsto{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

per cui:

$$V_4 = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid [v]_{\mathscr{B}} = (a,b,c),\ -2a+b+c = 0,\ 3a-3b = 0\} = \mathscr{L}(v_1 + v_2 + v_3) = \mathscr{L}((2,0,3)).$$

Quindi, una base di autovettori è $[(0,-1,0), (-1,1,0), (2,0,3)]$.

II

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1) Dati la retta $r\colon x+y+z+1 = x-y-4z-7 = 0$ e il punto $P = (2,0,0)$, determinare la retta s passante per P e ortogonale e incidente alla retta r e determinare la distanza $d(P,r)$.

2) Studiare, al variare del parametro reale h, il fascio di coniche del piano $z = 0$ di equazione:
$$x^2 + 2hxy + hy^2 + 2hy - 1 = 0,$$
determinando, in particolare, punti base e coniche spezzate. Determinare il vertice della parabola del fascio.

3) Classificare la quadrica Q di equazione:
$$x^2 - 2xz - y^2 + 2z - 1 = 0,$$
determinarne il vertice e stabilire la natura della sezione di Q con il piano $\pi\colon x - y + z = 0$.

Soluzione

1) I parametri direttori di r sono $(3,-5,2)$, per cui il piano π passante per P e perpendicolare a r ha equazione $3x - 5y + 2z = 6$. Il punto $Q = \pi \cap r$ è:
$$Q = \pi \cap r\colon \begin{cases} 3x - 5y + 2z = 6 \\ x + y + z = -1 \\ x - y - 4z = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ z = -1. \end{cases}$$
Quindi, $Q = (1,-1,-1)$. Allora la retta cercata è la retta PQ:
$$PQ\colon \begin{cases} x - y - 2 = 0 \\ y - z = 0. \end{cases}$$
Inoltre:
$$d(P,r) = \overline{PQ} = \sqrt{3}.$$

2) La matrice associata al fascio di quadriche è:
$$B = \begin{pmatrix} 1 & h & 0 \\ h & h & h \\ 0 & h & -1 \end{pmatrix}.$$
Dato che $|B| = -h$, per $h = 0$ otteniamo la conica spezzata $(x-1)(x+1) = 0$ ed è spezzata la conica nascosta $y(2x+y+2) = 0$. Cerchiamo i punti base:
$$\begin{cases} (x-1)(x+1) = 0 \\ y(2x+y+2) = 0. \end{cases}$$
Troviamo i punti $(1,0), (1,-4)$ e $(-1,0)$ contato due volte. Inoltre, $|A| = h - h^2$. Dunque, per $h < 0$ e $h > 1$ abbiamo delle iperboli; in particolare, per $h = -1$ abbiamo un'iperbole equilatera. Per $h = 1$ abbiamo una parabola e per $0 < h < 1$ abbiamo delle ellissi. Notiamo che non ci sono circonferenze nel fascio di coniche.

La parabola del fascio ha equazione $x^2 + y^2 + 2xy + 2y - 1 = 0$ e il suo punto improprio è $P_\infty = (1,-1,0)$. Quindi, le rette ortogonali all'asse di simmetria della parabola sono del tipo $y = x + k$. Cerchiamo tra queste quella tangente:
$$\begin{cases} y = x + k \\ x^2 + 2xy + y^2 + 2y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x + k \\ 4x^2 + (4k+2)x + k^2 + 2k - 1 = 0. \end{cases}$$
La retta è tangente se $\frac{\Delta}{4} = 0$, cioè per $k = \frac{5}{4}$. Quindi, il vertice è dato da:
$$\begin{cases} y = x + \frac{5}{4} \\ 4x^2 + 7x + \frac{49}{16} = 0, \end{cases}$$
cioè $V = (-\frac{7}{8}, \frac{3}{8})$.

3) Le matrici associate alla quadrica sono:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dato che $|B| = 0$ e $|A| \neq 0$, concludiamo subito che la quadrica è un cono. Inoltre, il suo vertice è il punto $V = (1, 0, 1)$ e, dato che $V \notin \pi$, allora la conica $\Gamma = Q \cap \pi$ è irriducibile. Per stabilire la natura di Γ cerchiamo i suoi punti impropri:

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x^2 - 2xz - y^2 + 2zt - t^2 = 0 \\ t = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x + z \\ z(4x + z) = 0 \\ t = 0. \end{cases}$$

Dal momento che Γ ha due punti impropri reali e distinti, concludiamo che Γ è un'iperbole.