CdL in Ingegneria Informatica - Ingegneria Elettronica (P-Z)
Ingegneria delle Telecomunicazioni

Prova scritta di **Algebra lineare e Geometria**- 29 Gennaio 2013

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.

IA

È assegnata l'applicazione lineare $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la cui matrice associata rispetto alla base canonica è:

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & h-1 & 1 & 0 \\ h & 0 & -h & h \end{pmatrix},$$

al variare di $h \in \mathbb{R}$.

1) Studiare f al variare di $h \in \mathbb{R}$, determinando $\operatorname{Ker} f$ e $\operatorname{Im} f$.
2) Calcolare, al variare di $h \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(2,0,1,1)$.
3) Posto $V = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x = z\}$, dire per quale valore di h la restrizione di f a V induce un endomorfismo φ su V.
4) Dire se φ è semplice, determinando, in caso affermativo, una base di autovettori.

Soluzione

1) Dal momento che $|M(f)| = h(h-1)$, concludiamo subito che per $h \neq 0, 1$ f è un isomorfismo, cioè f è iniettiva e suriettiva, cosicché $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^4$ e $\operatorname{Ker} f = \{(0,0,0,0)\}$.
   Sia $h = 0$. In tal caso:

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

   per cui $\dim \operatorname{Im} f = \rho(M(f)) = 3$ e $\operatorname{Im} f = \mathscr{L}((1,0,1,0),(0,1,-1,0),(1,-1,1,0))$. Inoltre, $\dim \operatorname{Ker} f = \dim \mathbb{R}^4 - \dim \operatorname{Im} f = 3$ e:

$$\operatorname{Ker} f = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+z = 0,\ y-z = 0,\ -y = 0\} = \mathscr{L}((0,0,0,1)).$$

   Sia $h = 1$. In tal caso:

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix},$$

   per cui $\dim \operatorname{Im} f = \rho(M(f)) = 3$ e $\operatorname{Im} f = \mathscr{L}((1,0,1,1),(0,1,0,0),(1,-1,1,-1))$. Inoltre, $\dim \operatorname{Ker} f = \dim \mathbb{R}^4 - \dim \operatorname{Im} f = 3$ e:

$$\operatorname{Ker} f = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+z = 0,\ y-z = 0,\ -2z+t = 0\} = \mathscr{L}((-1,1,1,2)).$$

2) Per calcolare $f^{-1}(2,0,1,1)$ dobbiamo risolvere il sistema la cui matrice completa associata è:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & h-1 & 1 & 0 & 1 \\ h & 0 & -h & h & 1 \end{array}\right) \xmapsto{\text{riducendo, con } h\neq 1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h-1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & h & \frac{-2h^2+h-1}{h-1} \end{array}\right).$$

Quindi, per $h \neq 0,1$ vediamo che matrice completa e incompleta hanno entrambe rango 4, per cui il sistema ammette una e una sola soluzione:

$$\begin{cases} x+z=2 \\ y-z=0 \\ (h-1)z=-1 \\ ht=\frac{-2h^2+h-1}{h-1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{2h-1}{h-1} \\ y=\frac{1}{1-h} \\ z=\frac{1}{1-h} \\ t=\frac{-2h^2+h-1}{h^2-h} \end{cases} \Rightarrow f^{-1}(2,0,1,1)=\{(\tfrac{2h-1}{h-1},\tfrac{1}{1-h},\tfrac{1}{1-h},\tfrac{-2h^2+h-1}{h^2-h})\in\mathbb{R}^4\}.$$

Se $h=0$, allora $\rho(A)=3$, mentre $\rho(A|B)=4$, per cui $f^{-1}(2,0,1,1)=\emptyset$.
Se $h=1$, allora si vede facilmente che $\rho(A)=3$, mentre $\rho(A|B)=4$, per cui $f^{-1}(2,0,1,1)=\emptyset$.

3) Dobbiamo determinare il valore di h per il quale $f(V)\subseteq V$. Dal momento che:

$$V=\mathscr{L}((1,0,1,0),(0,1,0,0),(0,0,0,1)),$$

allora $f(V)=\mathscr{L}(f(1,0,1,0),f(0,1,0,0),f(0,0,0,1))$. Quindi:

$$f(V)=\mathscr{L}((2,-1,2,0),(0,1,h-1,0),(0,0,0,h)).$$

I tre vettori $(2,-1,2,0),(0,1,h-1,0),(0,0,0,h)\in V$ contemporaneamente (cioè verificano la sua equazione cartesiana) se e solo se $h=1$. Quindi, per $h=1$ la restrizione di f a V induce un endomorfismo di V.

4) Dati $v_1=(1,0,1,0)$, $v_2=(0,1,0,0)$ e $v_3=(0,0,0,1)$, sia $\mathscr{A}=[v_1,v_2,v_3]$ una base di V. Dato che (x,y,x,t) è il generico vettore di V, si vede facilmente che $[(x,y,x,t)]_{\mathscr{A}}=(x,y,t)$. Dunque:

$$\begin{aligned} \varphi(1,0,1,0)&=(2,-1,2,0)=2v_1-v_2 &&\Rightarrow [\varphi(1,0,1,0)]_{\mathscr{A}}=(2,-1,0) \\ \varphi(0,1,0,0)&=(0,1,0,0)=v_2 &&\Rightarrow [\varphi(0,1,0,0)]_{\mathscr{A}}=(0,1,0) \\ \varphi(0,0,0,1)&=(0,0,0,1)=v_3 &&\Rightarrow [\varphi(0,0,0,1)]_{\mathscr{A}}=(0,0,1) \end{aligned}$$

e

$$M^{\mathscr{A}}(\varphi)=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Quindi:

$$P(T)=\begin{vmatrix} 2-T & 0 & 0 \\ -1 & 1-T & 0 \\ 0 & 0 & 1-T \end{vmatrix}=(1-T)^2(2-T).$$

Dato che $\varphi(v_2)=v_2$ e che $\varphi(v_3)=v_3$, concludiamo subito che $V_1=\mathscr{L}(v_2,v_3)$. Calcoliamo V_2:

$$M^{\mathscr{A}}(\varphi)-2I=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

per cui:

$$V_2=\{v\in V \mid [v]_{\mathscr{A}}=(a,b,c),\ -a-b=0,\ -c=0\}=\mathscr{L}((1,-1,0)_{\mathscr{A}})=\mathscr{L}(v_1-v_2).$$

Dunque, una base di autovettori di V è data da:

$$[v_2,v_3,v_1-v_2]=[(0,1,0,0),(0,0,0,1),(1,-1,1,0)].$$

IB

Provare che la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

è associata ad un prodotto scalare di $\mathbb{R}^4$, determinare una base ortogonale di $V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x = z\}$ rispetto a questo prodotto scalare ed estenderla a una base ortogonale di $\mathbb{R}^4$.

Soluzione

Dal momento che:

$$P_A(T) = \begin{vmatrix} 1-T & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1-T & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3-T & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-T \end{vmatrix} = (1-T)^2(T^2 - 4T + 1),$$

vediamo che gli autovalori di A sono tutti positivi. Essendo, poi, A simmetrica, concludiamo subito che è associata a un prodotto scalare di $\mathbb{R}^4$.
Prendiamo, a piacere, $v_1 = (1, 0, 1, 0) \in V$. I vettori ortogonali a v_1 rispetto a questo prodotto scalare verificano la condizione:

$$\begin{pmatrix} x & y & z & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x & y & z & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \Longleftrightarrow y + 2z = 0.$$

Dunque:

$$\mathscr{L}(v_1)^\perp \cap V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x = z,\ y + 2z = 0\}.$$

Scegliamo, a piacere, il vettore $v_2 = (1, -2, 1, 0) \in \mathscr{L}(v_1)^\perp \cap V$. I vettori ortogonali a v_2 rispetto a questo prodotto scalare verificano la condizione:

$$\begin{pmatrix} x & y & z & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x & y & z & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \Longleftrightarrow -y = 0.$$

Dunque:

$$\mathscr{L}(v_1, v_2)^\perp \cap V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x = z,\ y + 2z = 0, -y = 0\} = \mathscr{L}((0, 0, 0, 1)).$$

Scegliamo il vettore $v_3 = (0, 0, 0, 1) \in \mathscr{L}(v_1, v_2)^\perp \cap V$ e vediamo che $[v_1, v_2, v_3]$ è una base ortogonale di V. Per completare a una base ortogonale di $\mathbb{R}^4$ vediamo che i vettori ortogonali a v_3 rispetto a questo prodotto scalare verificano la condizione:

$$\begin{pmatrix} x & y & z & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x & y & z & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Longleftrightarrow t = 0.$$

Quindi:

$$\mathscr{L}(v_1, v_2, v_3)^\perp = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid y + 2z = 0,\ -y = 0,\ t = 0\} = \mathscr{L}((1, 0, 0, 0)).$$

Dunque, $[(1, 0, 1, 0), (1, -2, 1, 0), (0, 0, 0, 1), (1, 0, 0, 0)]$ è una base ortogonale di $\mathbb{R}^4$ rispetto al prodotto scalare assegnato.

II

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1) Determinare le equazioni della retta r del piano $z = 0$, incidente la retta $s\colon x - z - 2 = y - z + 1 = 0$ e perpendicolare alla retta $t\colon x - 2z = y - 3z = 0$.

2) Nel piano $z = 0$, determinare il fascio ϕ di parabole aventi la retta $l\colon x + y = 0$ come asse di simmetria e passanti per il punto $P = (-1, 1) \in l$.

3) Detta Γ la conica del piano $z = 0$ di equazione:
$$x^2 + 2xy + y^2 + 2x - 2y + 4 = 0,$$
mostrare che Γ è una conica del fascio ϕ e determinare il suo fuoco, la sua direttrice e una sua equazione canonica.

4) Determinare e studiare il luogo delle rette passanti per l'origine O, che formano un angolo di $\frac{\pi}{3}$ con la retta $2x - y = x - z = 0$.

Soluzione

1) La retta r deve passare per il punto comune alla retta s e al piano $z = 0$, cioè $A = (2, -1, 0) \in r$. Inoltre, r è contenuta nel piano passante per A e ortogonale a t. Dal momento che i parametri direttori di t sono $(2, 3, 1)$, tale piano ha equazione $2(x - 2) + 3(y + 1) + z = 0$, cioè $2x + 3y + z - 1 = 0$. Dunque:
$$r\colon \begin{cases} z = 0 \\ 2x + 3y + z - 1 = 0. \end{cases}$$

2) Dato che $P \in l$ e l è l'asse di simmetria, P è il vertice delle parabole del fascio. Quindi, la retta passante per P e ortogonale a l, che ha equazione $x - y + 2 = 0$, è tangente alle parabole in P. Inoltre, le parabole del fascio sono tangenti alla retta impropria nel punto improprio della retta l. Quindi, le coniche spezzate del fascio sono la conica unione della retta impropria e della retta $x - y + 2 = 0$ tangente in P e la conica spezzata di equazione $(x + y)^2 = 0$ (dal momento che $x + y = 0$ è la retta che congiunge i due punti di tangenza, P e il suo punto improprio). Quindi, in coordinate omogenee il fascio di parabole cercato ha equazione:
$$ht(x - y + 2t) + (x + y)^2 = 0.$$
Passando alle coordinate non omogenee:
$$h(x - y + 2) + (x + y)^2 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + 2xy + hx - hy + 2h = 0.$$

3) La conica Γ è chiaramente una conica del fascio, in quanto si ottiene per il valore $h = 2$. Questo vuol dire che $x + y = 0$ è il suo asse di simmetria e che $P = (-1, 1)$ è il suo vertice. Cerchiamo una sua forma canonica:
$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
Quindi, $|B| = -4$ e $\mathrm{Tr}(A) = 2$. Dato che una forma canonica di Γ è del tipo $\beta Y^2 = 2\gamma X$, con $\beta = \mathrm{Tr}(A)$ e $-\beta\gamma^2 = |B|$, vediamo che $\beta = 2$ e possiamo prendere $\gamma = \sqrt{2}$. Dunque, una forma canonica di Γ è $2Y^2 = 2\sqrt{2}X$, cioè:
$$Y^2 = \sqrt{2}X.$$
Questa è un'equazione del tipo $Y^2 = 2pX$, con $p = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Consideriamo la circonferenza c di centro il vertice $P = (-1, 1)$ e raggio $\frac{p}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}$. L'intersezione di c con l'asse di simmetria, che ha equazione $x + y = 0$, è costituita da due punti: uno è il fuoco, mentre l'altro appartiene alla direttrice:
$$\begin{cases} (x + 1)^2 + (y - 1)^2 = \frac{1}{8} \\ x + y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{5}{4} \\ y = \frac{5}{4} \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x = -\frac{3}{4} \\ y = \frac{3}{4}. \end{cases}$$

Abbiamo i punti $P_1 = (-\frac{5}{4}, \frac{5}{4})$ e $P_2 = (-\frac{3}{4}, \frac{3}{4})$. Prendiamo la retta ortogonale all'asse di simmetria $x + y = 0$ e passante per P_2: se interseca la conica, P_2 è il fuoco, altrimenti il fuoco è P_1:

$$\begin{cases} y = x + \frac{3}{2} \\ x^2 + 2xy + y^2 + 2x - 2y + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x + \frac{3}{2} \\ 4x^2 + 6x + \frac{13}{4} = 0. \end{cases}$$

Il sistema non ha soluzioni reali. Quindi, la retta $y = x + \frac{3}{2}$ è la direttrice e $P_1 = (-\frac{5}{4}, \frac{5}{4})$ è il fuoco.

4) La retta assegnata ha parametri direttori $(1, 2, 1)$. La generica retta passante per O ha equazione:

$$\begin{cases} x = lz \\ y = mz, \end{cases}$$

con parametri direttori $(l, m, 1)$. Perché questa retta formi un angolo di $\frac{\pi}{3}$ con la retta assegnata deve accadere che:

$$\frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3} = \pm\frac{l + 2m + 1}{\sqrt{6}\sqrt{l^2 + m^2 + 1}} \Rightarrow \sqrt{3(l^2 + m^2 + 1)} = \pm\sqrt{2}(l + 2m + 1).$$

Elevando al quadrato otteniamo $l^2 - 5m^2 - 8lm - 4l - 8m + 1 = 0$. Sostituendo $l = \frac{x}{z}$ e $m = \frac{y}{z}$ e moltiplicando per z^2 otteniamo l'equazione del luogo cercato:

$$x^2 - 5y^2 - 8xy - 4xz - 8yz + z^2 = 0.$$

Le sue matrici associate sono:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -2 & 0 \\ -4 & -5 & -4 & 0 \\ -2 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -2 \\ -4 & -5 & -4 \\ -2 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dato che $|B| = 0$ e $|A| = -81 \neq 0$, la quadrica ottenuta è un cono.