CdL in Ingegneria Informatica - Ingegneria Elettronica (P-Z)
Ingegneria delle Telecomunicazioni

Prova scritta di **Algebra lineare e Geometria**- 26 Settembre 2013

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.

I

È assegnata l'applicazione lineare $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ mediante le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} f(2,1,-1) &= (2,0,1,2) \\ f(1,0,1) &= (1,1,0,2) \\ f(1,1,0) &= (1,1,1,2). \end{aligned}$$

1) Determinare e studiare l'applicazione lineare $g\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ tale che $g \circ f = i_{\mathbb{R}^3}$, dove $i_{\mathbb{R}^3}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è l'applicazione identica, e $g(0,0,0,1) = (1,1,1)$.

2) Determinare l'applicazione lineare $\varphi = f \circ g\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$.

3) Verificare che φ è semplice.

Soluzione

1) Deve essere:

$$\begin{cases} g(f(2,1,-1)) = (2,1,-1) \\ g(f(1,0,1)) = (1,0,1) \\ g(f(1,1,0)) = (1,1,0) \\ g(0,0,0,1) = (1,1,1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g(2,0,1,2) = (2,1,-1) \\ g(1,1,0,2) = (1,0,1) \\ g(1,1,1,2) = (1,1,0) \\ g(0,0,0,1) = (1,1,1), \end{cases}$$

per cui vediamo che la matrice associata a g rispetto alle basi canoniche è:

$$M(g) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Riducendo otteniamo:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Quindi, $\dim \operatorname{Im} g = \rho(M(g)) = 3$, il che vuol dire che $\operatorname{Im} g = \mathbb{R}^3$ e g è suriettiva. Inoltre, $\dim \operatorname{Ker} g = 1$ e:

$$\operatorname{Ker} g = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid -y+t=0,\ -x+z=0,\ -2x+t=0\} = \mathscr{L}((1,2,1,2)).$$

2) Da:

$$\begin{aligned} f(2,1,-1) &= (2,0,1,2) \\ f(1,0,1) &= (1,1,0,2) \\ f(1,1,0) &= (1,1,1,2). \end{aligned}$$

ricaviamo:

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

per cui:

$$M(\varphi) = M(f) \cdot M(g) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

3) Dato che:

$$P(T) = \begin{vmatrix} -T & -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1-T & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 1-T & 1 \\ -2 & -2 & 0 & 3-T \end{vmatrix} = T(T-1)^3,$$

φ è semplice se $\dim V_1 = m_1 = 3$. Dal momento che:

$$M(\varphi) - I = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xmapsto{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

vediamo che $\dim V_1 = \dim \mathbb{R}^4 - \rho(M(\varphi) - I) = 3 = m_1$, per cui φ è semplice.

II

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1) Determinare la retta passante per l'origine $O = (0,0,0)$, ortogonale alla retta $r\colon x + 3y = 2y - z = 0$ e parallela al piano $\pi\colon x + y - z = 0$.

2) Determinare la sfera passante per l'origine $O = (0,0,0)$, $A = (1,1,1)$, $B = (1,-1,0)$ e $C = (1,2,1)$.

3) Dati la sfera $S\colon x^2 + y^2 + z^2 - 5x - 3y + 5z = 0$ e il piano $\alpha\colon x + y + z - 1 = 0$, determinare centro e raggio della circonferenza $\Gamma = S \cap \alpha$.

Soluzione

1) La retta r ha parametri direttori $(3,-1,-2)$ e un vettore perpendicolare a π è quello di componenti $(1,1,-1)$. Quindi, la retta cercata ha parametri direttori (l, m, n) con:

$$\begin{cases} 3l - m - 2n = 0 \\ l + m - n = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} l = 3m \\ n = 4m. \end{cases}$$

Quindi, parametri direttori della retta cercata sono $(3,1,4)$ ed essa avrà equazioni:

$$\begin{cases} x = 3y \\ z = 4y. \end{cases}$$

2) La generica quadrica ha equazione:

$$x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0.$$

Imponendo il passaggio per i 4 punti otteniamo:

$$\begin{cases} d = 0 \\ a + b + c + d = -3 \\ a - b + d = -2 \\ a + 2b + c + d = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -5 \\ b = -3 \\ c = 5 \\ d = 0. \end{cases}$$

Quindi, la sfera cercata ha equazione $x^2 + y^2 + z^2 - 5x - 3y + 5z = 0$.

3) La sfera S ha centro $C = (\frac{5}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{5}{2})$ e raggio $r = \frac{\sqrt{59}}{2}$. La retta s passante per C e perpendicolare ad α ha equazioni:

$$s\colon \begin{cases} y = x - 1 \\ z = x - 5. \end{cases}$$

Il centro C' di Γ è:

$$C' = \alpha \cap s\colon \begin{cases} y = x - 1 \\ z = x - 5 \\ x + y + z - 1 = 0, \end{cases}$$

per cui $C' = (\frac{7}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{8}{3})$. Inoltre:

$$h = d(C, \alpha) = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

e il raggio di Γ è:

$$r' = \sqrt{r^2 - h^2} = \sqrt{\frac{44}{3}}.$$