Ingegneria Civile ed Ambientale, Gestionale (A-L), R.E.A.
Ingegneria Informatica, Ingegneria Elettronica (P-Z) Compito di **Geometria** del 20/04/13

I

Sia dato l'endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definito da

$$\begin{cases} f(1,1,0) &= (h,h,h+1,h-1) \\ f(1,1,1) &= (h+1,h+1,h+1,h+1) \\ f(0,1,1) &= (h+1,h+2,h+1,h+2) \end{cases} \qquad \text{con } h \text{ parametro reale.}$$

1) Studiare f al variare di h, determinando in ciascun caso $\operatorname{Im} f$ e $\operatorname{Ker} f$. Trovare le equazioni cartesiane di $\operatorname{Im} f$.
2) Determinare il valore di h per cui $f^{-1}(h,1,0,1) \neq \varnothing$. Per questo valore del parametro calcolare $f^{-1}(h,1,0,1)$.
3) Detta $p : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ la proiezione definita da $p(x,y,z,t) = (x,y,t)$, si consideri l'endomorfismo $\varphi = p \circ f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Studiare φ al variare di h, determinando $\operatorname{Im}\varphi$ e $\operatorname{Ker}\varphi$.
4) Studiare le semplicità di φ determinando, quando possibile, una base di autovettori.

II

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.
1) date le rette

$$\mathbf{r} : \begin{cases} x-1=0 \\ y-z=0 \end{cases} \qquad \mathbf{s} : \begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases}$$

determinare la generica retta $\mathbf{t}$ complanare con $\mathbf{r}$ ed $\mathbf{s}$ e parallela al piano $\vec{x}\vec{z}$. Trovare e studiare la quadrica Q luogo delle rette $\mathbf{t}$.
2) Sul piano coordinato $z=0$ studiare il fascio di coniche

$$\phi : x^2 + (h-1)y^2 - 2x + (h-2)y = 0$$

calcolando in particolare i punti base e le coniche spezzate di ϕ. Per la parabola $\mathbf{p}$ di ϕ calcolare vertice, fuoco, asse e direttrice.
3) Determinare e studiare le quadriche che contengono le coniche

$$\Gamma_1 : \begin{cases} x-z=0 \\ x^2+y^2-1=0 \end{cases} \qquad \Gamma_2 : \begin{cases} y-z=0 \\ x^2+y^2-1=0 \end{cases}$$

SVOLGIMENTO I

1) Usando la base canonica si ottiene facilmente la matrice

$$M(f) = \begin{pmatrix} 0 & h & 1 \\ -1 & h+1 & 1 \\ 0 & h+1 & 0 \\ -1 & h & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & h & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & h+1 & 0 \\ -1 & -h & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & h & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & h+1 & 0 \\ 0 & -h-1 & 0 \end{pmatrix}$$

quindi per $h \neq -1$ f è iniettiva, $\operatorname{Im} f$ è generato dalle colonne di $M(f)$ e si trova facilmente

$$\operatorname{Im} f = \{(x,y,z,t) \mid x+y-z-t=0\} \subseteq \mathbb{R}^4.$$

Per $h=-1$ si ha $\operatorname{Ker} f = \{(x,x,x)\}$, $\operatorname{Im} f = \mathscr{L}((0,1,0,1),(1,0,0,1))$ e si trova facilmente

$$\operatorname{Im} f = \{(x,y,z,t) \mid x+y-t=z=0\} \subseteq \mathbb{R}^4.$$

2) Usando le equazioni appena trovate, vediamo che per $h=-1$ $(-1,1,0,1) \notin \operatorname{Im} f$ e quindi la sua controimmagine è vuota; per $h \neq -1$ $(h,1,0,1) \in \operatorname{Im} f$ per $h=0$. In questo caso f è iniettiva e si trova che

$$f^{-1}(0,1,0,1)=\{(-1,0,0)\}=\{-e_1\}.$$

3) Avremo:

$$\left\{\begin{array}{ll} \varphi(e_1)=p(0,-1,0,-1) & =(0,-1,-1) \\ \varphi(e_2)=p(h,h+1,h+1,h) & =(h,h+1,h) \\ \varphi(e_1)=p(1,1,0,2) & =(1,1,2) \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad M(\varphi)=\left(\begin{array}{ccc} 0 & h & 1 \\ -1 & h+1 & 1 \\ -1 & h & 2 \end{array}\right).$$

Siccome $|M(\varphi)|=h+1$, per $h \neq -1$ φ è un isomorfismo; per $h=-1$ si ha $\operatorname{Ker}\varphi=\operatorname{Ker} f$, $\operatorname{Im}\varphi=\mathscr{L}((0,1,1);(1,0,1))$.
4) Dal polinomio caratteristico

$$|M(\varphi)-TI|=\left|\begin{array}{ccc} -T & h & 1 \\ -1 & h+1-T & 1 \\ -1 & h & 2-T \end{array}\right|=(h+1-T)(T-1)^2$$

vediamo che per $h \neq 0$ si hanno gli autovalori $T=1$ (doppio) e $T=h+1$. In questo caso calcoliamo gli autospazi.
$T=1$ $\quad V_1=\{(hy+z,y,z)\}$ con base $u_1=(h,1,0)$, $u_2=(1,0,1)$;
$T=h+1$ $\quad V_{h+1}=\{(x,x,x)\}$ con base $u_3=(1,1,1)$;
quindi possiamo concludere che φ è semplice. Per $h=0$ si ha l'autovalore $T=1$ triplo; si verifica facilmente che φ non è semplice in quanto l'autospazio associato coincide con quello calcolato prima, ed ha dimensione 2.

II

1) Consideriamo i punti generici $R \equiv (1,\gamma,\gamma) \in \mathbf{r}$, $S \equiv (0,\beta,0) \in \mathbf{s}$ e richiediamo che la retta RS sia parallela al piano $y=0$: $(RS)_\infty \equiv (1,\gamma-\beta,\gamma,0) \in (y=0) \;\Rightarrow\; \beta=\gamma$, quindi

$$\mathbf{t}:\left\{\begin{array}{l} \gamma x-z=0 \\ y-\gamma=0 \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad Q:\; xy-z=0.$$

Si verifica facilmente che Q è un paraboloide iperbolico.
2) Dalla matrice associata alle coniche di ϕ si ha

$$B=\left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & -1 \\ 0 & h-1 & \frac{h-2}{2} \\ -1 & \frac{h-2}{2} & 0 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} |B|=-\frac{h^2}{4} \\ \\ |A|=h-1 \end{array}$$

quindi le coniche spezzate di ϕ sono:
$h=0:\quad x^2-y^2-2x-2y=0 \;\Rightarrow\; (x+y)(x-y-2)=0$;
$h=\infty:\quad y^2+y=0 \;\Rightarrow\; y(y+1)=0$.
Secando queste coniche si ottengono i punti base $O \equiv (0,0)$, $(2,0)$ e $(1,-1)$ contato due volte. Per le coniche irriducibili si ha:

$|A|>0$ $\;h>1$ $\quad$ ELLISSI. Per $h=2$ si ha la circonferenza $x^2+y^2-2x=0$;

$|A|<0$ $\;h<1$ $\quad$ IPERBOLI. Non ci sono iperboli equilatere;

$|A|=0$ $\;h=1$ $\quad$ PARABOLA $\mathbf{p}: y=x^2-2x$.

La parabola **p** ha asse parallelo all'asse $\vec{y}$, applicando le note formule troviamo: vertice $(1, -1)$, fuoco $(1, -\frac{3}{4})$, asse $x - 1 = 0$, direttrice $y + \frac{5}{4} = 0$.
3) La generica quadrica contenente Γ_1 ha equazione

$$(x - z)(ax + by + cz + d) + x^2 + y^2 - 1 = 0$$

secando questa quadrica col piano $y - z = 0$ si ottiene la conica

$$\begin{cases} y - z = 0 \\ (a+1)x^2 + (b+c)xy + y^2 - axz - (b+c)yz + dx - dz - 1 = 0 \end{cases} \equiv \Gamma_2$$

per $a = 0$, $b + c = 0$, $d = 0$; quindi si ottiene la quadrica

$$Q: \, x^2 + bxy + y^2 - bxz - byz + bz^2 - 1 = 0$$

a cui associamo la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & \frac{b}{2} & -\frac{b}{2} & 0 \\ \frac{b}{2} & 1 & -\frac{b}{2} & 0 \\ -\frac{b}{2} & -\frac{b}{2} & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad |B| = -|A| = \frac{b(b-2)}{2}.$$

In particolare Q non è mai un paraboloide. Per $b = 0$ si trova il cilindro ellittico di equazione $x^2 + y^2 - 1 = 0$, di vertice $Z_\infty \equiv (0, 0, 1, 0)$. Per $h = 2$ si trova un cilindro ellittico di vertice $(1, -1, 0, 0)$.
Per $b < 0$, $b > 2$ si hanno iperboloidi iperbolici ($|B| > 0$); per $0 < b < 2$ si hanno quadriche a punti ellittici; per decidere se si tratta di ellissoidi o di iperboloidi calcoliamo il polinomio caratteristico della sottomatrice A:

$$P(T) = -T^3 + (b+2)T^2 - (\frac{3}{4}b^2 + 2b + 1)T + \frac{2b - b^2}{2}$$

dal quale si deduce facilmente che nel range considerato gli autovalori sono positivi, quindi Q è un ellissoide, sicuramente reale.