CdL in Ingegneria Informatica - Ingegneria Elettronica (P-Z)
Ingegneria delle Telecomunicazioni

Prova scritta di **Algebra lineare e Geometria**- 20 Giugno 2013

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.

I

Sia $V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - 2y + z = 0\}$ e sia $f : V \to V$ l'endomorfismo di V definito dalle relazioni:

$$\begin{aligned} f(1,1,1,1) &= (4+h, 4, 4-h, 2) \\ f(1,0,-1,0) &= (1,0,-1,h) \\ f(2,1,0,0) &= (5,4,3,0), \end{aligned}$$

al variare di $h \in \mathbb{R}$.

1) Studiare f al variare di $h \in \mathbb{R}$, determinando $\operatorname{Ker} f$ e $\operatorname{Im} f$.

2) Nel caso $h = 0$ verificare che f è semplice e determinare una base di autovettori.

3) Sia $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'endomorfismo la cui restrizione a V induce f e tale che $\varphi(1,1,0,0) = (3,3,2,0)$. Determinare $A = M(\varphi)$ associata a φ rispetto alla base canonica.

4) Calcolare $\varphi^{-1}(3h, h, 0, h+2)$ al variare di $h \in \mathbb{R}$.

Soluzione

1) Dal momento che la matrice:
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
ha rango 3, come si verifica facilmente, allora $\mathscr{A} = [(1,1,1,1), (1,0,-1,0), (2,1,0,0)]$ è una base di V. Dobbiamo scrivere $M^{\mathscr{A}}(f)$. Dunque, da:

$$(4+h, 4, 4-h, 2) = a(1,1,1,1) + b(1,0,-1,0) + c(2,1,0,0) \Rightarrow \begin{cases} a+b+2c = 4+h \\ a+c = 4 \\ a-b = 4-h \\ a = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = h-2 \\ c = 2 \end{cases}$$

ricaviamo $[f(1,1,1,1)]_{\mathscr{A}} = (2, h-2, 2)$. Da:

$$(1,0,-1,h) = a(1,1,1,1) + b(1,0,-1,0) + c(2,1,0,0) \Rightarrow \begin{cases} a+b+2c = 1 \\ a+c = 0 \\ a-b = -1 \\ a = h \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = h \\ b = h+1 \\ c = -h \end{cases}$$

ricaviamo $[f(1,0,-1,0)]_{\mathscr{A}} = (h, h+1, -h)$. Da:

$$(5,4,3,0) = a(1,1,1,1) + b(1,0,-1,0) + c(2,1,0,0) \Rightarrow \begin{cases} a+b+2c = 5 \\ a+c = 4 \\ a-b = 3 \\ a = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = -3 \\ c = 4 \end{cases}$$

ricaviamo $[f(2,1,0,0,)]_{\mathscr{A}} = (0,-3,4)$. Dunque:

$$M^{\mathscr{A}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & h & 0 \\ h-2 & h+1 & -3 \\ 2 & -h & 4 \end{pmatrix}$$

e $|M^{\mathscr{A}}(f)| = -4(h+1)(h-2)$. Dunque, per $h \neq -1, 2$ f è un isomorfismo, per cui f è iniettiva e suriettiva e $\operatorname{Ker} f = \{(0,0,0,0)\}$ e $\operatorname{Im} f = V$.

Sia $h = -1$. In tal caso:

$$M^{\mathscr{A}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xmapsto{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

per cui $\dim \operatorname{Im} f = \rho(M^{\mathscr{A}}(f)) = 2$ e una base di $\operatorname{Im} f$ è $[(3,4,5,2),(1,0,-1,-1)]$. Inoltre, $\dim \operatorname{Ker} f = 1$ e:

$$\operatorname{Ker} f = \{v \in V \mid [v]_{\mathscr{A}} = (a,b,c),\ 2a - b = 0,\ -3a - 3c = 0\} = \mathscr{L}((1,2,-1)_{\mathscr{A}}) = \mathscr{L}((1,0,-1,1)).$$

Sia $h = 2$. In tal caso:

$$M^{\mathscr{A}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \xmapsto{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

per cui $\dim \operatorname{Im} f = \rho(M^{\mathscr{A}}(f)) = 2$ e una base di $\operatorname{Im} f$ è $[(6,4,2,2),(1,0,1,2)]$. Inoltre, $\dim \operatorname{Ker} f = 1$ e:

$$\operatorname{Ker} f = \{v \in V \mid [v]_{\mathscr{A}} = (a,b,c),\ 2a + 2b = 0,\ 3b - 3c = 0\} = \mathscr{L}((1,-1,-1)_{\mathscr{A}}) = \mathscr{L}((-2,0,2,1)).$$

2) Sia $h = 0$. Allora:

$$P(T) = \begin{vmatrix} 2-T & 0 & 0 \\ -2 & 1-T & -3 \\ 2 & 0 & 4-T \end{vmatrix} = (2-T)(1-T)(4-T).$$

Gli autovalori sono $2, 1, 4$ e sono tutti di molteplicità algebrica 1, per cui f è semplice per $h = 0$. Cerchiamo una base di autovettori.

Sia $T = 2$. Allora:

$$M^{\mathscr{A}}(f) - 2I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -3 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

per cui:

$$V_2 = \{v \in V \mid [v]_{\mathscr{A}} = (a,b,c),\ -2a - b - 3c = 0,\ 2a + 2c = 0\} = \mathscr{L}((1,1,-1)_{\mathscr{A}}) = \mathscr{L}((0,0,0,1)).$$

Sia $T = 1$. Allora:

$$M^{\mathscr{A}}(f) - I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xmapsto{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

per cui:

$$V_1 = \{v \in V \mid [v]_{\mathscr{A}} = (a,b,c),\ a = 0,\ -3c = 0\} = \mathscr{L}((0,1,0)_{\mathscr{A}}) = \mathscr{L}((1,0,-1,0)).$$

Sia $T = 4$. Allora:

$$M^{\mathscr{A}}(f) - 4I = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & -3 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xmapsto{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

per cui:

$$V_4 = \{v \in V \mid [v]_{\mathscr{A}} = (a,b,c),\ -2a = 0,\ -3b-3c = 0\} = \mathscr{L}((0,1,-1)_{\mathscr{A}}) = \mathscr{L}((-1,-1,-1,0)).$$

Quindi, una base di autovettori è $[(0,0,0,1),(1,0,-1,0),(-1,-1,-1,0)]$.

3) Deve essere:

$$\begin{cases} \varphi(1,1,1,1) = (4+h,4,4-h,2) \\ \varphi(1,0,-1,0) = (1,0,-1,h) \\ \varphi(2,1,0,0) = (5,4,3,0) \\ \varphi(1,1,0,0) = (3,3,2,0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varphi(e_1) = (2,1,1,0) \\ \varphi(e_2) = (1,2,1,0) \\ \varphi(e_3) = (1,1,2,h) \\ \varphi(e_4) = (h,0,-h,2+h), \end{cases}$$

per cui:

$$M(\varphi) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & h \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -h \\ 0 & 0 & -h & h+2 \end{pmatrix}.$$

4) Per calcolare $\varphi^{-1}(3h,h,0,h+2)$ dobbiamo risolvere il sistema:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & h & 3h \\ 1 & 2 & 1 & 0 & h \\ 1 & 1 & 2 & -h & 0 \\ 0 & 0 & -h & h+2 & h+2 \end{array}\right) \xmapsto{\text{riducendo}} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & h & 3h \\ -3 & 0 & -1 & -2h & -5h \\ -4 & 0 & 0 & -4h & -8h \\ 0 & 0 & 0 & -h^2+h+2 & -h^2+h+2 \end{array}\right).$$

Quindi, per $h \neq -1, 2$ abbiamo una sola soluzione:

$$\begin{cases} 2x+y+z+ht = 3h \\ -3x-z-2ht = -5h \\ -4x-4ht = -8h \\ (-h^2+h+2)t = -h^2+h+2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = h \\ y = 0 \\ z = 0 \\ t = 1, \end{cases}$$

per cui per $h \neq -1, 2$ $\varphi^{-1}(3h,h,0,h+2) = \{(h,0,0,1)\}$.

Sia $h = -1$. Allora dobbiamo risolvere il sistema associato alla matrice:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & -1 & -3 \\ -3 & 0 & -1 & 2 & 5 \\ -4 & 0 & 0 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Abbiamo in questo caso ∞^1 soluzioni:

$$\begin{cases} 2x+y+z-t = -3 \\ -3x-z-2t = 5 \\ -4x+4t = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t-2 \\ y = 0 \\ z = -t+1, \end{cases}$$

per cui per $h = -1$ $\varphi^{-1}(3h,h,0,h+2) = \varphi^{-1}(-3,-1,0,1) = \{(t-2,0,-t+1,t) \in \mathbb{R}^3\}$.

Sia $h = 2$. Allora dobbiamo risolvere il sistema associato alla matrice:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 2 & 6 \\ -3 & 0 & -1 & -4 & -10 \\ -4 & 0 & 0 & -8 & -16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Abbiamo in questo caso ∞^1 soluzioni:

$$\begin{cases} 2x+y+z+2t = 6 \\ -3x-z-4t = -10 \\ -4x-8t = -16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2t+4 \\ y = 0 \\ z = 2t-2, \end{cases}$$

per cui per $h = 2$ $\varphi^{-1}(3h,h,0,h+2) = \varphi^{-1}(6,2,0,4) = \{(-2t+4,0,2t-2,t) \in \mathbb{R}^3\}$.

II

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1) Date le rette:
$$r\colon \begin{cases} x - hy + hz = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad s\colon \begin{cases} 2x + hz - 1 = 0 \\ 2y - hz + 1 = 0, \end{cases}$$
determinare il piano che le contiene e trovare i valori del parametro reale h per cui esse sono parallele.

2) Nel caso $h = 0$ determinare il piano π passante per $A = (1,1,0)$ e ortogonale a r, la retta t passante per A ortogonale e incidente a r e la retta p passante per $B = (1,-1,0)$ ortogonale e incidente la retta s.

3) Determinare e studiare il fascio di coniche tangenti in A alla retta t e tangenti in B alla retta p.

4) Data la conica:
$$\Gamma\colon \begin{cases} x^2 - 2xy + y^2 - 3x + 1 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$
determinare il cilindro avente vertice il punto $(1,-1,1,0)$ e contenente Γ.

Soluzione

1) Verifichiamo subito che le rette sono complanari:
$$\begin{vmatrix} 1 & -h & h & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & h & -1 \\ 0 & 2 & -h & 1 \end{vmatrix} = 0.$$
I piani che contengono s hanno equazioni:
$$\lambda(2x + hz - 1) + \mu(2y - hz + 1) = 0.$$
Prendiamo il punto $O = (0,0,0) \in r$ e cerchiamo quello che lo contiene:
$$-\lambda + \mu = 0 \Rightarrow \lambda = \mu.$$
Quindi il piano che le contiene è il piano di equazione $x + y = 0$.
Parametri direttori di r sono $(-h, h, h+1)$ e di s sono $(-h, h, 2)$. r e s sono parallele se la seguente matrice ha rango 1:
$$\begin{pmatrix} -h & h & h+1 \\ -h & h & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -h & h & h+1 \\ 0 & 0 & 1-h \end{pmatrix}.$$
I valori per i quali le rette sono parallele sono $h = 0$ e $h = 1$.

2) Per $h = 0$ abbiamo:
$$r\colon \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad s\colon \begin{cases} 2x - 1 = 0 \\ 2y + 1 = 0. \end{cases}$$
Parametri direttori di entrambe le rette sono $(0,0,1)$. Dunque, il piano π ha equazione $z = 0$. Calcoliamo:
$$\pi \cap r\colon \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0, \end{cases}$$
per cui la retta t è la retta che congiunge $A = (1,1,0)$ e il punto $O = (0,0,0)$:
$$t\colon \begin{cases} x - y = 0 \\ z = 0. \end{cases}$$

Dato che π è ortogonale alla retta s, calcoliamo la retta p nello stesso modo:

$$\pi \cap s \colon \begin{cases} 2x = 1 \\ 2y = -1 \\ z = 0. \end{cases}$$

Quindi, la retta p è quella che congiunge B con il punto $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0)$, per cui ha equazioni:

$$p \colon \begin{cases} x + y = 0 \\ z = 0. \end{cases}$$

3) Il fascio di coniche ha equazione:

$$(x+y)(x-y) + h(x-1)^2 = 0 \Rightarrow (h+1)x^2 - y^2 - 2hx + h = 0.$$

Sappiamo già che le coniche spezzate si trovano solo per $h = 0$, per cui possiamo direttamente calcolare:

$$|A| = \begin{vmatrix} h+1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -h - 1.$$

Quindi, per $h < -1$ abbiamo delle ellissi (tutte reali). In particolare, per $h = -2$ abbiamo una circonferenza. Per $h = -1$ abbiamo una parabola e per $h > -1$, $h \neq 0$, abbiamo delle iperboli. Non ci sono iperboli equilatere nel fascio.

4) Il generico punto $P = (\alpha, \beta, 0) \in \Gamma$ è tale che $\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 - 3\alpha + 1 = 0$. La retta PV ha equazioni:

$$\begin{cases} x - \alpha = z \\ y - \beta = -z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = x - z \\ \beta = y + z. \end{cases}$$

Quindi, sostituendo in $\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 - 3\alpha + 1 = 0$ vediamo che il cilindro cercato ha equazione:

$$(x-z)^2 - 2(x-z)(y+z) + (y+z)^2 - 3(x-z) + 1 = 0.$$