Ingegneria Civile ed Ambientale, Gestionale (A-L), R.E.A.
Ingegneria Informatica, Ingegneria Elettronica (P-Z) Compito di **Geometria** del 19/02/13

I

Sia dato l'endomorfismo $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definito da

$$f(x, y, z, t) = (hy + (h-1)t, hx + z + ht, (h-1)x + 2y - z + t, ht)$$

1) Studiare f al variare di h determinando in ciascun caso $\operatorname{Im} f$ e $\operatorname{Ker} f$.
2) Sia assegnato l'endomorfismo $g\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definito dalle relazioni:

$$\begin{cases} g(0,0,2,3) = (-3,2,1,0) \\ g(0,1,-1,0) = (0,-1,3,0) \\ g(0,0,0,3) = (-3,0,3,0) \\ g(1,2,0,0) = (0,0,3,0) \end{cases}$$

Determinare il valore di h per cui risulta $f = g$.
3) Studiare la semplicità di g e determinarne gli autospazi.
4) Dato il sottospazio

$$V = \{(x, y, z, t) \mid x - y = t = 0\} \subseteq \mathbb{R}^4$$

calcolare $f(V) = \{f(v) \mid v \in V\}$ determinando le sue equazioni cartesiane al variare di h.

II

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.
1) Sono assegnate le rette ed il piano

$$\mathbf{r} : \begin{cases} x + y = 0 \\ z - 2 = 0 \end{cases} ; \quad \mathbf{s} : \begin{cases} x - y = 0 \\ z + 2 = 0 \end{cases} \qquad \pi : x - y + 5 = 0$$

Determinare le rette incidenti con $\mathbf{r}$ e parallele ad $\mathbf{s}$ e aventi distanza dal piano π uguale a $\sqrt{3}$.
2) Determinare e studiare, sul piano $z = 0$, il fascio ϕ di coniche che ha i seguenti punti base

$$(0,0),\ (1,1),\ (2,0),\ (3,1).$$

Per l'iperbole equilatera del fascio determinare il centro di simmetria e gli asintoti.
3) Studiare, al variare del parametro reale h, la famiglia di quadriche di equazione

$$2hxz + 2yz - z^2 - 2hx + 2hy = 0.$$

In particolare determinare il vertice del cono o cilindro γ della famiglia.

SVOLGIMENTO I

1) Usando la base canonica si ottiene la matrice

$$M(f) = \begin{pmatrix} 0 & h & 0 & h-1 \\ h & 0 & 1 & h \\ h-1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & h \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad |M(f)| = 2h^3 - h^2.$$

Quindi se $h \neq 0, \frac{1}{2}$, f è un isomorfismo.
Per $h = 0$ riducendo la matrice si vede che $\rho(M(f)) = 3$ e si ha:
$Imf = \mathscr{L}((0,0,1,0),(0,1,0,0),(-1,0,0,0))$, $\dim\ker f = 1$ con $\ker f = \{(2y,y,0,0)\}$.
Se $h = \frac{1}{2}$ si ha $\rho(M(f)) = 3$, quindi
$Imf = \mathscr{L}((\frac{1}{2},0,2,0),(0,1,-1,0),(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},1,\frac{1}{2}))$, $\dim\ker f = 1$ con $\ker f = \{(x,0,-\frac{1}{2}x,0)\}$.
2) Il valore di h per cui si ha $f = g$ risulta $h = 0$: basta ricavare la matrice $M(g)$ ed uguagliarla alla matrice $M(f)$.
3) Per $h = 0$ si determina facilmente il polinomio caratteristico:

$$P(T) = T^2(T^2 + T - 2) = T^2(T-1)(T+2).$$

Gli autovalori sono $T = 0$ con molteplicità algebrica 2, $T = 1$ con molteplicità algebrica 1 ed autospazio associato $V_1 = \{(0,y,y,0)\}$, $T = -2$ con autospazio associato $V_{-2} = \{(0,y,-2y,0)\}$. L'autospazio V_0 associato all'autovalore $T = 0$ coincide col nucleo $\mathrm{Ker}\, f = \{(2y,y,0,0)\}$ che ha dimensione 1, quindi g non è semplice.
4) Osservato che $V = \{(x,x,z,0)\}$ con base $(1,1,0,0)$, $(0,0,1,0)$, calcoliamo le loro immagini:
$f(1,1,0,0) = (h,h,h+1,0)$
$f(0,0,1,0) = f(e_3) = (0,1,-1,0)$
quindi $f(V) = \mathscr{L}((h,h,h+1,0),(0,1,-1,0))$. Siccome queste due immagini sono indipendenti, $\dim f(V) = 2$; le equazioni cartesiane si trovano facilmente, $f(V) = \{(x,y,z,t) \mid (2h+1)x - hy - hz = t = 0\}$.

II

1) Detto $R \equiv (-\alpha,\alpha,2) \in \mathbf{r}$ il punto generico, congiungendo R col punto improprio di $\mathbf{s}$, $S_\infty \equiv (1,1,0,0)$ si ha

$$\mathbf{t} : \begin{cases} x = y - 2\alpha \\ z - 2 = 0 \end{cases}$$

Osserviamo che $\mathbf{t}$ è parallela a π; per trovare α imponiamo che la distanza $d(R,\pi) = \sqrt{3}$. Quindi

$$\frac{|-2\alpha+5|}{\sqrt{2}} = \sqrt{3} \Rightarrow 2\alpha - 5 = \pm\sqrt{6} \Rightarrow \alpha = \frac{5-\sqrt{6}}{2}, \frac{5+\sqrt{6}}{2}$$

Scriviamo allora le equazioni delle due rette:

$$\mathbf{s} : \begin{cases} x - y + 5 - \sqrt{6} = 0 \\ z - 2 = 0 \end{cases} \quad ; \quad \mathbf{s}' : \begin{cases} x - y + 5 + \sqrt{6} = 0 \\ z - 2 = 0 \end{cases}$$

2) Siamo nel caso di quattro punti distinti quindi ci sono tre coniche spezzate distinte

$$(x-y)(x-y-2) = 0\,;\ y(y-1) = 0\,;\ (x-3y)(x+y-2) = 0.$$

Usiamo le prime due per scrivere l'equazione del fascio

$$\Phi:\ (x-y)(x-y-2) + hy(y-1) = 0 \quad \Phi:\ x^2 + (1+h)y^2 - 2xy - 2x + (2-h)y = 0\,.$$

Le coniche irriducibili si hanno per $|B| = -h - \frac{h^2}{4} \neq 0$ cioè per $h \neq 0, -4$. Dal $|A| = h$ avremo:
$|A| > 0 \quad h > 0$ ELLISSI. Non ci sono circonferenze;
$|A| < 0 \quad h < 0$ IPERBOLI. Per $h = -2$ si ha l'iperbole equilatera $x^2 - y^2 - 2xy - 2x + 4y = 0$. Il suo centro di simmetria ha coordinate $C = (\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$, i suoi punti impropri sono $P_\infty \equiv (1+\sqrt{2},1,0), Q_\infty \equiv (1-\sqrt{2},1,0,)$. I suoi asintoti sono le rette CP_∞, CQ_∞ di equzioni

rispettivamente $2x - 2(1+\sqrt{2})y + \sqrt{2} - 2 = 0$, $2x - 2(1-\sqrt{2})y - \sqrt{2} - 2 = 0$.
$|A| = 0 \quad h = 0 \quad \Rightarrow$ non ci sono parabole.

3) Dalla matrice B associata alla quadrica si ha

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & h & -h \\ 0 & 0 & 1 & h \\ h & 1 & -1 & 0 \\ -h & h & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} |B| = h^2(h+1)^2 \geq 0 \\ \\ |A| = 0. \end{array}$$

Quindi per $h = 0, -1$ si trovano quadriche degeneri.
Per $h = 0$, $\rho(B) = 2$ quindi si ha una quadrica spezzata in due piani distinti $z(2y - z) = 0$.
Per $h = -1$ si ha $\rho(B) = 3$, $|A| = 0$, si ha il cilindro di equazione $2x + 2yz - 2xz - 2z - z^2 = 0$.
Il vertice di questo cilindro si calcola risolvendo il sistema $B \cdot \underline{x} = 0$, da cui otteniamo che il punto di coordinate $(1, 1, 0, 0)$.

Per $h \neq 0, -1$ si ha $|B| > 0$ e $|A| = 0$, per cui si hanno paraboloidi iperbolici.