CdL in Ingegneria Informatica - Ingegneria Elettronica (P-Z)
Ingegneria delle Telecomunicazioni

Prova scritta di **Algebra lineare e Geometria**- 11 Luglio 2013

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.

I

È assegnato l'endomorfismo $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definito da:

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2h-2 & h+2 & 0 & 0 \\ 1 & -h & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & h \end{pmatrix},$$

al variare di $h \in \mathbb{R}$.

1) Studiare f al variare di $h \in \mathbb{R}$, determinando $\operatorname{Ker} f$ e $\operatorname{Im} f$.
2) Studiare la semplicità di f al variare di $h \in \mathbb{R}$.
3) Calcolare $f^{-1}(1, 2h-2, 1, 2)$ al variare di $h \in \mathbb{R}$.
4) Dati $U = \mathscr{L}((1,-1,2,h),(0,1,h,0))$ e $V = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x-y+z-t=0\}$, calcolare la somma $U+V$, al variare di $h \in \mathbb{R}$, specificando quando essa è diretta o meno.

Soluzione

1) Dato che $|M(f)| = 3h^2$, per $h \neq 0$ f è un isomorfismo, per cui f è iniettiva e suriettiva, cioè $\operatorname{Ker} f = \{(0,0,0,0)\}$ e $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^4$.
   Sia $h = 0$. In tal caso:
   $$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xmapsto{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
   Quindi, $\dim \operatorname{Im} f = \rho(M(f)) = 3$ e una sua base è $[(1,-2,1,2),(-1,2,0,-1),(0,0,1,0)]$. Inoltre, $\dim \operatorname{Ker} f = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x-y=0, x+z-t=0, x=0\} = \mathscr{L}((0,0,1,1))$.

2) Dato che:
   $$P(T) = \begin{vmatrix} 1-T & -1 & 0 & 0 \\ 2h-2 & h+2-T & 0 & 0 \\ 1 & -h & 1-T & -1 \\ 2 & -1 & 0 & h-T \end{vmatrix} = (1-T)(3-T)(h-T)^2,$$
   allora per $h \neq 1,3$ gli autovalori sono $1,3,h$ con $m_1 = 1$, $m_3 = 1$ e $m_h = 2$. Per $h = 1$ gli autovalori sono 1 e 3 con $m_1 = 3$ e $m_3 = 1$. Per $h = 3$ gli autovalori sono 1 e 3 con $m_1 = 1$ e $m_3 = 3$. In tutti i casi dobbiamo andare a vedere $\dim V_h$:
   $$M(f) - hI = \begin{pmatrix} 1-h & -1 & 0 & 0 \\ 2h-2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -h & 1-h & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xmapsto{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 1-h & -1 & 0 & 0 \\ 1-h+h^2 & 0 & 1-h & -1 \\ h+1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Per $h \neq -1$ vediamo che $\rho(M(f) - hI) = 3$, per cui $\dim V_h = 4 - 3 = 1 < m_h$. Quindi, per $h \neq -1$ f non è semplice. Per $h = -1$ $\rho(M(f) - hI) = 2$, per cui $\dim V_h = 4 - 2 = 2 = m_h$. Dal momento che, in questo caso, $m_1 = 1$ e $m_3 = 1$, necessariamente si avrà $\dim V_1 = m_1 = 1$ e $\dim V_3 = m_3 = 1$. Quindi, f è semplice solo per $h = -1$.

3) Dal momento che $(1, 2h - 2, 1, 2)$ è la prima colonna di $M(f)$ e che per $h \neq 0$ f è un isomorfismo, concludiamo subito che per $h \neq 0$ $f^{-1}(1, 2h - 2, 1, 2) = (1, 0, 0, 0)$.

Sia $h = 0$. In tal caso, dobbiamo risolvere il sistema la cui matrice completa è:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xmapsto{\text{riducendo}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x - y = 1 \\ x + z - t = 1 \\ x = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = t + 1. \end{cases}$$

Quindi, per $h = 0$, $f^{-1}(1, -2, 1, 2) = (1, 0, t + 1, t) \in \mathbb{R}^4$.

4) Dal momento che la matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & h \\ 0 & 1 & h & 0 \end{pmatrix}$$

ha rango 2 per ogni $h \in \mathbb{R}$, concludiamo che $\dim U = 2$ per ogni h. Troviamo le equazioni cartesiane di U:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & h \\ 0 & 1 & h & 0 \\ x & y & z & t \end{pmatrix} \xmapsto{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & h \\ 0 & 1 & h & 0 \\ 0 & 0 & (-h-2)x - hy + z & -hx + t \end{pmatrix}.$$

Dunque, $U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid (-h - 2)x - hy + z = 0,\ -hx + t = 0\}$. Quindi:

$$U \cap W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid (-h - 2)x - hy - z = 0,\ -hx + t = 0,\ x - y + z - t = 0\} = \\ = \mathscr{L}((1 - h, 3, -h^2 + 2h + 2, h - h^2)).$$

In particolare, $\dim(U \cap W) = 1$ per ogni $h \in \mathbb{R}$ e dalla formula di Grassmann troviamo che $\dim(U + W) = 4$, cioè $U + W = \mathbb{R}^4$ e la somma non è mai diretta.

II

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1) Sono dati i punti $A = (0, 1, 1)$, $B = (1, -1, 0)$, $C = (0, 0, 1)$ e $P_\infty = (1, 2, -3, 0)$. Determinare la retta r passante per A e B e la retta s passante per C e P_∞. Mostrare che sono sghembe e determinare la retta perpendicolare e incidente entrambe.

2) Dati i punti $P_1 = (0, 1)$, $P_2 = (1, -1)$ e $P_3 = (4, 2)$ del piano $z = 0$, determinare e studiare il fascio di coniche passanti per P_1 e P_2 e aventi in P_3 retta tangente $x - 2y = 0$. Determinare la conica del fascio tangente alla retta $y = 1$.

3) Determinare e studiare le quadriche contenente la conica:

$$\Gamma\colon \begin{cases} x = 0 \\ yz - 1 = 0 \end{cases}$$

e passanti per i punti $A_1 = (1, 0, 0)$, $A_2 = (1, 0, 1)$ e $A_3 = (1, 1, 0)$. Determinare la natura delle coniche sezione con il piano $\pi\colon y + z = 0$.

Soluzione

1) Le rette r e s hanno equazioni:

$$r\colon \begin{cases} 2x+y-1=0 \\ x+z-1=0 \end{cases} \quad \text{e} \quad s\colon \begin{cases} 2x-y=0 \\ 3x+z-1=0. \end{cases}$$

Dal momento che:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0,$$

concludiamo subito che le due rette sono sghembe. I parametri direttori di r e s sono, rispettivamente, $(1,-2,-1)$ e $(1,2-3)$. Quindi, una retta perpendicolare a entrambe ha parametri direttori (l,m,n), dove:

$$\begin{cases} l-2m-n=0 \\ l+2m-3n=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} l=4m \\ n=2m. \end{cases}$$

Quindi, la retta cercata ha parametri direttori $(4,1,2)$ e punto improprio $(4,1,2,0)$. Il piano contenente r e questo punto improprio ha equazione $x+2y-3z+1=0$. Il piano contenente s e questo punto improprio ha equazione $x-2y-z+1=0$. Quindi, la retta cercata ha equazioni:

$$\begin{cases} x+2y-3z+1=0 \\ x-2y-z+1=0. \end{cases}$$

2) Le rette P_1P_2, P_1P_3 e P_2P_3 hanno equazioni, rispettivamente, $2x+y-1=0$, $x-4y+4=0$ e $x-y-2=0$. Quindi, il fascio di coniche ha equazione:

$$h(x-2y)(2x+y-1)+(x-4y+4)(x-y-2)=0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (2h+1)x^2-(3h+5)xy+(4-2h)y^2+(-h+2)x+(2h+4)y-8=0.$$

Le coniche spezzate del fascio sono solo le due usate per scrivere la sua equazione, per cui possiamo dire che per $h \neq 0$ abbiamo coniche irriducibili. Dato che:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2h+1 & \dfrac{-3h-5}{2} \\ \dfrac{-3h-5}{2} & 4-2h \end{vmatrix} = \frac{-25h^2-6h-9}{4} < 0 \quad \forall h \in \mathbb{R},$$

concludiamo che le coniche del fascio sono tutte iperboli. Inoltre, $\mathrm{Tr}(A)=5 \neq 0$, per cui nel fascio non ci sono iperboli equilatere.

Cerchiamo la conica del fascio tangente alla retta $y=1$:

$$\begin{cases} (2h+1)x^2-(3h+5)xy+(4-2h)y^2+(-h+2)x+(2h+4)y-8=0 \\ y=1 \end{cases} \begin{cases} (2h+1)x^2+(-4h-3)x=0 \\ y=1. \end{cases}$$

La conica tangente alla retta è quella per la quale $-4h-3=0$, cioè $h=-\frac{3}{4}$. Essa ha equazione:

$$2x^2+11xy-22y^2-11x-10y+32=0.$$

3) Le quadriche contenenti la conica assegnata hanno equazioni:

$$x(ax+by+cz+d)+yz-1=0.$$

Imponendo il passaggio per i punti otteniamo il sistema:

$$\begin{cases} a+d-1=0 \\ a+c+d-1=0 \\ a+b+d-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=0 \\ c=0 \\ d=1-a. \end{cases}$$

Quindi, le quadriche cercate hanno equazione:

$$ax^2 + yz + (1-a)x - 1 = 0.$$

Dato che:

$$|B| = \frac{(a+1)^2}{4} \quad \text{e} \quad |A| = -\frac{a}{4},$$

vediamo che per $a = -1$ abbiamo un cono, per $a = 0$ un paraboloide iperbolico e per $a \neq 0, -1$ un iperboloide iperbolico.

Le coniche che vogliamo studiare hanno equazioni:

$$\begin{cases} ax^2 + yz + (1-a)x - 1 = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = -y \\ ax^2 - y^2 + (1-a)x - 1 = 0. \end{cases}$$

La quadrica di equazione $ax^2 - y^2 + (1-a)x - 1 = 0$ è spezzata per $a = -1$, mentre per $a \neq -1$ è un cilindro di vertice $Z_\infty \notin y + z = 0$. Quindi, per $a = -1$ abbiamo una conica spezzata, mentre per $a \neq -1$ abbiamo una conica irriducibile.

Sia $a = -1$. Allora:

$$\begin{cases} -x^2 - y^2 + 2x - 1 = 0 \\ z = -y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x - 1 + iy)(x - 1 - iy) = 0 \\ z = -y. \end{cases}$$

Quindi, per $a = -1$ la conica è spezzata in due rette immaginarie e coniugate.

Sia $a \neq -1$. Cerchiamo i punti impropri della conica:

$$\begin{cases} ax^2 - y^2 + (1-a)xt - t^2 = 0 \\ z = -y \\ t = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ax^2 - y^2 = 0 \\ z = -y \\ t = 0. \end{cases}$$

Quindi, per $a > 0$ abbiamo un'iperbole, per $a = 0$ una parabola e per $a < 0$, $a \neq -1$, abbiamo un'ellisse.