# CdL in Ingegneria Informatica - Ingegneria Elettronica (SCIV-Z)- Ingegneria Industriale (S-Z) - Ingegneria delle Telecomunicazioni

Prova scritta di **Algebra lineare e Geometria**- 7 Febbraio 2012

---

*Durata della prova: tre ore.*
*È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.*
*Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.*
*È vietato consultare libri o appunti.*

---

**I**

Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ sono assegnati i vettori $v_1 = (2,0,0,-1)$, $v_2 = (0,0,1,0)$ e $v_3 = (0,2,0,1)$ e i sottospazi $V = \mathscr{L}(v_1, v_2, v_3)$ e:

$$W = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y + ht = 0,\ (h-1)x + y + z - t = 0,\ y + z + ht = 0\},$$

al variare di $h \in \mathbb{R}$.

1) Determinare l'equazione cartesiana di $V$.

2) Calcolare $V \cap W$ e $V + W$, specificando se la somma $V + W$ è diretta o meno.

3) Studiare l'endomorfismo $f \colon V \to V$ così definito:

$$\begin{aligned} f(v_1) &= hv_1 + (1-h)v_3 \\ f(v_2) &= hv_2 + (1-h)v_3 \\ f(v_3) &= (1-h)v_1 + (h-1)v_2 + v_3 \end{aligned}$$

al variare del parametro reale $h$, determinando in ciascun caso $\operatorname{Im} f$ e $\ker f$.

4) Studiare la semplicità di $f$ al variare di $h \in \mathbb{R}$.

5) Determinare una base ortogonale di $V$ rispetto al prodotto scalare euclideo.

*Soluzione*

1) Dato che la matrice:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

è ridotta di rango 3, concludiamo che $\dim V = 3$ e che una sua base è $A = [v_1, v_2, v_3]$. Calcoliamo la sua equazione cartesiana:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ x & y & z & t \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow - \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ x & y & t \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2x - 2y + 4t = 0 \Leftrightarrow x - y + 2t = 0.$$

Dunque, $V = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y + 2t = 0\}$.

2) Vediamo $\dim W$ al variare di $h$. $W$ è l'insieme delle soluzioni del sistema omogeneo la cui matrice associata è la seguente:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & h \\ h-1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & h \end{pmatrix} \stackrel{\text{riducendo}}{\longmapsto} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & h \\ h & 0 & 1 & -1-h \\ 1-h & 0 & 0 & h+1 \end{pmatrix}.$$

Quindi, la matrice ha rango 3 per ogni $h \in \mathbb{R}$, cioè le soluzioni del sistema omogeneo sono $\infty^1$ e $\dim W = 1$ per ogni $h \in \mathbb{R}$. Per quel che riguarda $V \cap W$, chiaramente:

$$V \cap W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y + ht = 0,\ (h-1)x + y + z - t = 0,\ y + z + ht = 0, x - y + 2t = 0\}.$$

Quindi, $V \cap W$ è l'insieme delle soluzioni del sistema omogeneo la cui matrice associata è la seguente:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & h \\ h-1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & h \end{pmatrix} \stackrel{\text{riducendo}}{\longmapsto} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & h-2 \\ h & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & h+2 \end{pmatrix}.$$

Procedendo con la riduzione e supponendo $h \neq 2$ otteniamo la seguente matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & h-2 \\ h & 0 & 1 & 0 \\ 1-h & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

da cui vediamo che per $h \neq 1, 2$ la matrice ha rango 4. Quindi, il sistema omogeneo associato ha come unica soluzione quella nulla, cioè $V \cap W = \{(0, 0, 0, 0)\}$. In tal caso:

$$\dim(V + W) = \dim V + \dim W - \dim(V \cap W) = 4 \Rightarrow V + W = \mathbb{R}^4.$$

Dunque, per $h \neq 1, 2$ abbiamo $V \cap W = \{(0, 0, 0, 0)\}$, $V + W = \mathbb{R}^4$ e la somma è diretta. Supponiamo $h = 1$. Dalla riduzione fatta in precedenza vediamo che $V \cap W \neq \{(0, 0, 0, 0)\}$, perché la matrice ottenuta è ridotta di rango 3. Ma dato che $\dim W = 1$, deve essere $V \cap W = W$, cioè $W \subset V$ e $V + W = V$. Ovviamente, in tal caso, la somma non è diretta. Se $h = 2$, allora:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \stackrel{\text{riducendo}}{\longmapsto} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

La matrice ha rango 3 anche in questo caso. Come prima, dato che $\dim W = 1$, questo vuol dire che $V \cap W \neq \{(0, 0, 0, 0)\}$, da cui segue che $V \cap W = W$, $W \subset V$ e $V + W = V$. Naturalmente, nemmeno in questo caso la somma è diretta.

3) Dato che $A = [v_1, v_2, v_3]$ è una base di $V$, possiamo scrivere immediatamente la matrice associata a $f$:

$$M^{\mathscr{A}}(f) = \begin{pmatrix} h & 0 & 1-h \\ 0 & h & h-1 \\ 1-h & 1-h & 1 \end{pmatrix}.$$

Essendo $|M^{\mathscr{A}}(f)| = h^2$, vediamo che per $h \neq 0$ $f$ è un isomorfismo, cioè $f$ è iniettiva e suriettiva. Questo vuol dire che $\ker f = \{(0, 0, 0, 0)\}$ e che $\operatorname{Im} f = V$. Supponiamo $h = 0$:

$$M^{\mathscr{A}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \stackrel{\text{riducendo}}{\longmapsto} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi $\dim \operatorname{Im} f = \rho(M^{\mathscr{A}}(f)) = 2$ e una base di $\operatorname{Im} f$ è:

$$[f(v_1), f(v_3)] = [v_3, v_1 - v_2 + v_3] = [(0,2,0,1),(2,2,-1,0)].$$

Per quel che riguarda il nucleo, dalla matrice ottenuta con la riduzione vediamo che:

$$\begin{aligned}\ker f = \{v \in V \mid [v]_{\mathscr{A}} = (a,b,c),\, c = 0,\, a+b = 0\} = \{v \in V \mid [v]_{\mathscr{A}} = (a,-a,0)\} = \\ = \mathscr{L}((1,-1,0)_{\mathscr{A}}) = \mathscr{L}(v_1 - v_2) = \mathscr{L}((2,0,-1,-1)).\end{aligned}$$

4) Calcoliamo il polinomio caratteristico:

$$P(T) = \begin{vmatrix} h-T & 0 & 1-h \\ 0 & h-T & h-1 \\ 1-h & 1-h & 1-T \end{vmatrix} = (h-T)^2(1-T).$$

Quindi, per $h \neq 1$, abbiamo gli autovalori $h$ con $m_h = 2$ e 1 con $m_1 = 1$. Per $h = 1$ abbiamo l'autovalore 1 con $m_1 = 3$. Supponiamo $h \neq 1$: dato che deve necessariamente essere $\dim V_1 = m_1 = 1$, $f$ è semplice se $\dim V_h = m_h = 2$. Calcoliamo questa dimensione:

$$M^{\mathscr{A}}(f) - hI = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1-h \\ 0 & 0 & h-1 \\ 1-h & 1-h & 1-h \end{pmatrix} \xmapsto{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1-h \\ 0 & 0 & 0 \\ 1-h & 1-h & 0 \end{pmatrix}.$$

Dato che $h \neq 1$ questa matrice ha rango 2, da cui segue che $\dim V_h = 3 - 2 = 1 < 2 = m_h$. Questo ci dice che per $h \neq 1$ $f$ non è semplice. Sia $h = 1$. In tal caso, dobbiamo vedere se $\dim V_1 = m_1 = 3$:

$$M^{\mathscr{A}}(f) - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Questa matrice è quella tutta nulla, cioè ha rango 0. Questo vuol dire che $\dim V_1 = 3 = m_1$. Quindi, $f$ è semplice per $h = 1$. Osserviamo che in questo caso $M^{\mathscr{A}}(f) = I$, cioè per $h = 1$ $f$ è l'applicazione identica.

5) Rispetto all'ordinario prodotto scalare abbiamo:

$$\begin{aligned} v_1 \cdot v_1 &= 5 \\ v_1 \cdot v_2 &= 0 \\ v_1 \cdot v_3 &= -1 \\ v_2 \cdot v_2 &= 1 \\ v_2 \cdot v_3 &= 0 \\ v_3 \cdot v_3 &= 5. \end{aligned}$$

Quindi, $v_1$ e $v_2$ sono ortogonali tra loro. Per trovare una base ortogonale di $V$ basta cercare un vettore $v_3' = v_3 + av_1 + bv_2$ che sia ortogonale a $v_1$ e $v_2$, cioè tale che:

$$\begin{cases} v_3' \cdot v_1 = 0 \\ v_3' \cdot v_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (v_3 + av_1 + bv_2) \cdot v_1 = 0 \\ (v_3 + av_1 + bv_2) \cdot v_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_3 \cdot v_1 + av_1 \cdot v_1 + bv_2 \cdot v_2 = 0 \\ v_3 \cdot v_2 + av_1 \cdot v_2 + bv_2 \cdot v_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -1 + 5a = 0 \\ b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{5} \\ b = 0. \end{cases}$$

Possiamo, quindi, prendere:

$$v_3' = v_3 + \frac{1}{5}v_1 = (0,2,0,1) + \frac{1}{5}(2,0,0,-1) = \left(\frac{2}{5}, 2, 0, \frac{4}{5}\right)$$

e una base ortogonale di $V$ è:

$$[v_1, v_2, v_3'] = \left[(2,0,0,-1),(0,0,1,0),\left(\frac{2}{5},2,0,\frac{4}{5}\right)\right].$$

## II

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1) Date le rette:
$$r\colon \begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ z - 2 = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad s\colon \begin{cases} 3x + y + z = 0 \\ x + 3y = 0, \end{cases}$$
mostrare che esse sono incidenti e determinare il piano $\pi$ che le contiene. Determinare la retta $t$ ortogonale a $r$ e $s$ e passante per $P = (1, -1, 0)$.

2) Determinare e studiare il fascio di coniche del piano $z = 0$ tangenti alla retta $r\colon x + 2y + 1 = 0$ nel punto $A = (-1, 0)$ e passanti per $B = (-1, 1)$ e $C = (0, 1)$.

3) Determinare il cilindro di vertice $V = (1, 0, -1, 0)$ contenente la conica di equazioni:
$$\begin{cases} x^2 - 2xy - y^2 + 2x = 0 \\ z = 0. \end{cases}$$
Specificare la natura del cilindro.

*Soluzione*

1) Se calcoliamo $r \cap s$:
$$\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ z - 2 = 0 \\ 3x + y + z = 0 \\ x + 3y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{3}{4} \\ y = \dfrac{1}{4} \\ z = 2, \end{cases}$$
vediamo che $r \cap s \neq \emptyset$. Quindi, $r$ e $s$ sono complanari. Scegliamo, a piacere, il punto $O = (0, 0, 0) \in s$. Il piano $\pi$ contenente $r$ e $s$ è il piano contenente $r$ e il punto $O$. I piani contenenti $r$ hanno equazione:
$$\lambda(x - y + 1) + \mu(z - 2) = 0.$$
Imponendo il passaggio per $O$ otteniamo $\lambda - 2\mu = 0$. Dunque, prendendo $\lambda = 2$ e $\mu = 1$, otteniamo il piano $\pi$ contenente $r$ e $s$:
$$\pi\colon 2x - 2y + z = 0.$$
Le rette ortogonali a $r$ e $s$ sono esattamente le rette ortogonali a $\pi$, i cui parametri direttori sono $(2, -2, 1)$. Quindi, la retta $t$ che cerchiamo ha parametri direttori $(2, -2, 1)$ e passa per $P = (1, -1, 0)$, da cui segue che ha equazioni:
$$t\colon \frac{x - 1}{2} = \frac{y + 1}{-2} = z \Rightarrow t\colon \begin{cases} x - 2z - 1 = 0 \\ x + y = 0. \end{cases}$$

2) La retta $BC$ ha equazione $y = 1$ e, quindi, una prima conica spezzata, che è $r \cup BC$, ha equazione $(x + 2y + 1)(y - 1) = 0$. L'altra conica spezzata è $AC \cup AB$. Dato che $AB$ e $BC$ hanno equazioni, rispettivamente, $x = -1$ e $x - y + 1 = 0$, l'altra conica spezzata è $(x + 1)(x - y + 1) = 0$. Possiamo scrivere subito l'equazione del fascio di coniche:
$$(x + 2y + 1)(y - 1) + h(x + 1)(x - y + 1) = 0 \Rightarrow hx^2 + 2y^2 + (1 - h)xy + (2h - 1)x - (h + 1)y + h - 1 = 0.$$
Dato che le uniche coniche spezzate sono quelle usate per determinare il fascio (e, quindi, una si ottiene per $h = 0$ e l'altra per $h = \infty$) e che i punti base sono già noti, possiamo passare subito a classificare le coniche del fascio. Da:
$$|A| = \begin{vmatrix} h & \dfrac{1 - h}{2} \\ \dfrac{1 - h}{2} & 2 \end{vmatrix} = \frac{-h^2 + 10h - 1}{4},$$
vediamo che:

- per $h < 5 - 2\sqrt{6}$ e $h > 5 + 2\sqrt{6}$, con $h \neq 0$, si ha $|A| < 0$ e $|B| \neq 0$: abbiamo delle iperboli; inoltre, $\mathrm{Tr}(A) = h + 2 = 0$ per $h = -2$, cioè per $h = -2$ abbiamo un'iperbole equilatera;
- per $h = 5 - 2\sqrt{6}$ e $h = 5 + 2\sqrt{6}$ si ha $|A| = 0$ e $|B| \neq 0$: abbiamo due parabole;
- per $5 - 2\sqrt{6} < h < 5 + 2\sqrt{6}$ si ha $|A| > 0$ e $|B| \neq 0$: abbiamo delle ellissi; inoltre, $a_{12} = 0$ per $h = 1$, ma per $h = 1$ $a_{11} = 1 \neq 2 = a_{22}$: non ci sono circonferenze nel fascio.

3) Il generico punto della conica $\Gamma$ è il punto $P = (\alpha, \beta, 0)$, dove:

$$\alpha^2 - 2\alpha\beta - \beta^2 + 2\alpha = 0.$$

La retta $PV$ ha equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = \alpha + t \\ y = \beta \\ z = -t. \end{cases}$$

Sostituendo i parametri $\alpha$ e $\beta$:

$$\begin{cases} x = \alpha + t \\ y = \beta \\ z = -t \\ \alpha^2 - 2\alpha\beta - \beta^2 + 2\alpha = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = -z \\ \alpha = x + z \\ \beta = y \\ (x+z)^2 - 2(x+z)y - y^2 + 2(x+z) = 0, \end{cases}$$

vediamo che $(x+z)^2 - 2(x+z)y - y^2 + 2(x+z) = 0$ è l'equazione del cilindro cercato. La natura del cilindro, cioè se è iperbolico, parabolico o ellittico, può essere facilmente stabilita classificando la conica $\Gamma$. Le matrici associate a $\Gamma$ sono:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Dato che $|A| = -2 < 0$ e $|B| \neq 0$, $\Gamma$ è un'iperbole e, dunque, il cilindro ottenuto è iperbolico.